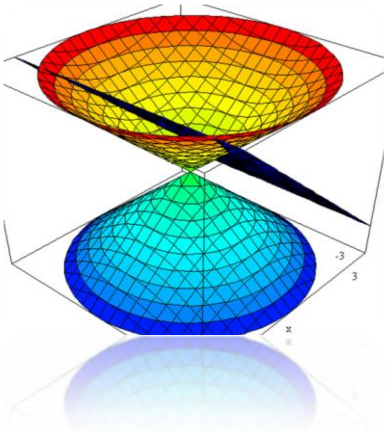
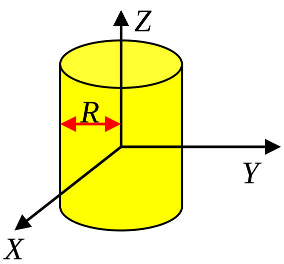
رياضيات

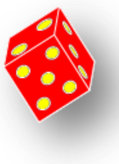
✓ السنة الثانية بكالوريا

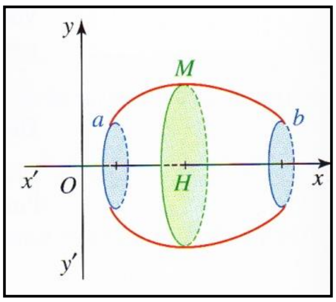
✓ شعبة العلوم التجريبية

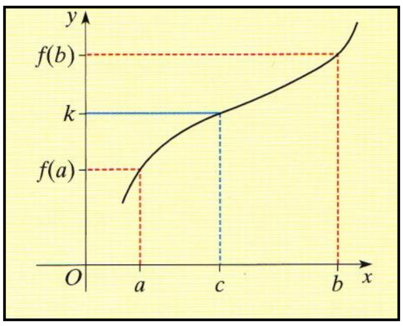
- ملخصات جميع الدروس
- تمارين متنوعة











ذ : عبدالعزيز بلخير

الإطار المرجعي للامتحان الوطني

المجال الرئيسي الأول : التحليل

المجال الفرعي الأول : المتتاليات العددية

1.1.1. استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$؛

2.1.1. استعمال نهايات المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية؛

3.1.1. تحديد نهاية مركب متتالية و دالة متصلة (متتاليات من النوع $v_n = f(u_n)$)؛

4.1.1. تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$ ؛

5.1.1. استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة.

المجال الفرعي الثاني: الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال

1.2.1. دراسة اتصال دالة عددية في نقطة باستعمال حساب النهايات؛

2.2.1. تحديد صورة قطعة أو مجال (محدود أو غير محدود) بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعا؛

3.2.1. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير ...؛

4.2.1. تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية ومبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال، لإثبات وحدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$ ؛

5.2.1. دراسة قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة و على مجال ؛

6.2.1. تحديد الدالة المشتقة لدالة عددية؛

7.2.1. تحديد رتابة دالة ؛

8.2.1. تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها؛

9.2.1. تحديد إشارة دالة انطلاقا من تمثيلها المبياني؛

10.2.1. الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x) = g(x)$ ومتراجحات من الشكل $f(x) \leq g(x)$ ؛

11.2.1. تحديد مشتقة ورتابة الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال، وتمثيلها مبيانيا؛

12.2.1. حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية؛

13.2.1. توظيف الدالة المشتقة الأولى و الدالة المشتقة الثانية في دراسة دالة عددية و في إثبات بعض المتفاوتات ....؛

14.2.1. دراسة دوال أو دوال مركبة من بين الدوال الواردة بالمقرر وتمثيلها مبيانيا (مجموعة التعريف، عناصر التماثل، الدورية، الرتابة، الفروع اللانهائية، المماسات، التقعر، نقط الانعطاف...)؛

المجال الفرعي الثالث : الدوال الأصلية

1.3.1. تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية؛

2.3.1. استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال.

المجال الفرعي الرابع : الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.4.1. التمكن من الحساب الجبري على اللوغاريتمات؛

2.4.1. التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات لوغاريتمية ؛

3.4.1. معرفة وتطبيق اللوغاريتم العشري (خاصة في حل المعادلات من نوع $10^x = a$)؛

4.4.1. التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية وتطبيقها؛

5.4.1. التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي على الدالة اللوغاريتمية النبيرية؛

6.4.1. التمكن من حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية؛

7.4.1. التمكن من نهايات الدالة الأسية النبيرية الأساسية وتطبيقها؛

8.4.1. التمكن من دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية ودالة اللوغاريتم النبيري.

المجال الفرعي الخامس : المعادلات التفاضلية

1.5.1. حل المعادلة $y' = ay + b$ ؛

2.5.1. حل المعادلة $y'' + ay' + by = 0$.

المجال الفرعي السادس : الحساب التكاملي

1.6.1. توظيف الدالة الأصلية و تقنية المكاملة بالأجزاء في حساب تكامل دالة؛

2.6.1. توظيف خاصيات التكامل؛

3.6.1. حساب مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيين؛

4.6.1. حساب حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل.

المجال الرئيسي الثاني : الجبر والهندسة

المجال الفرعي الأول : . الجداء السلمي في V_3

1.1.2. التعبير والبرهنة على تعامد متجهتين باستعمال الجداء السلمي؛

2.1.2. التعبير متجهيا عن التعامد وخاصياته؛

3.2.1. التعبير تحليليا عن التعامد وخاصياته.

المجال الفرعي الثاني : تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

1.2.2. تحديد معادلة مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية؛

2.2.2. تحديد تمثيل برامتري لمستقيم مار من نقطة وعمودي على مستوى؛

3.2.2. دراسة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

4.2.2 تحديد معادلة ديكارتية لفلكة محددة بمركزها وشعاعها؛

5.2.2 التعرف على مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ؛

6.2.2. توظيف مسافة نقطة عن مستوى في حل مسائل هندسية (الأوضاع النسبية لمستوى و فلكة و لمستقيم و فلكة...).

المجال الفرعي الثالث : الجداء المتجهي

1.3.2. حساب مساحة مثلث باستعمال الجداء المتجهي؛

2.3.2. تحديد معادلة مستوى محدد بثلاث نقط غير مستقيمية؛

3.3.2. توظيف مسافة نقطة عن مستقيم في حل مسائل هندسية ؛

4.3.2. تطبيق الجداء المتجهي في حل مسائل هندسية .

المجال الفرعي الرابع : الأعداد العقدية

1.4.2. التمكن من الحساب الجبري على الأعداد العقدية (في كل من كتاباتها الجبرية و المثلثية و الأسية)؛

2.4.2. الانتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية لعدد عقدي والعكس؛

3.4.2. إخطاط حدانيات مثلثية باستعمال الترميز الأسي لعدد عقدي؛

4.4.2. ترجمة المفاهيم الهندسية التالية: المسافة بين نقطتين، قياس الزوايا، ، استقامية النقط، استقامية وتعامد المتجهات، باستعمال الأداة العقدية؛

5.4.2. التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران ؛

6.4.2. التعرف على الإزاحة و التحاكي و الدوران من خلال صيغها العقدية؛

7.4.2. توظيف الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية (الاستقامية، التعامد، ....)؛

8.4.2. حل المعادلة $az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ؛

9.4.2. حل معادلات تؤول في حلها إلى حل معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد معاملاتها حقيقية.

المجال الفرعي الخامس : حساب الاحتمالات

1.5.2. استعمال النموذج التعدادي المناسب حسب الوضعية المدروسة؛

2.5.2. حساب احتمال اتحاد حدثين و احتمال الحدث المضاد لحدث واحتمال تقاطع حدثين ؛

3.5.2.حساب الاحتمال الشرطي و توظيفه لحساب احتمال تقاطع حدثين؛

4.5.2. التعرف على استقلالية حدثين؛

5.5.2. تحديد قانون احتمال متغير عشوائي و حساب مختلف وسيطاته ؛

6.5.2. التعرف على القانون الحداني وتطبيقه في وضعيات متنوعة.

جداول التخصيص

أ . حسب المجالات الرئيسية

المجالات	المجالات الفرعية	نسبة الأهمية
التحليل	المتتاليات العددية	55%
	الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال	
	الدوال الأصلية	
	الدوال اللوغاريتمية والأسية	
	المعادلات التفاضلية	
	الحساب التكاملي	
الجبر والهندسة	الجداء السلمي في V_3	15%
	تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء	
	الجداء المتجهي	
	الأعداد العقدية	30%
	حساب الاحتمالات	
المجموع		100%

ب . حسب المستويات المهارية

المستوى المهاري	نسبة الأهمية
تطبيق مباشر للمعارف (تعريف؛ خاصية؛ مبرهنة؛ خوارزمية؛ صيغة؛ تقنية؛ قاعدة؛).	50 %
استحضار وتطبيق معارف غير معلنة في السؤال (تعريف؛ خاصية؛ مبرهنة؛ خوارزمية؛ صيغة؛ تقنية؛ قاعدة؛ ....) في وضعية مألوفة.	35%
معالجة وضعيات غير مألوفة بتوليف معارف ونتائج.	15%

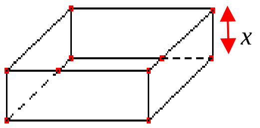
سلسلة تمارين تهيئية

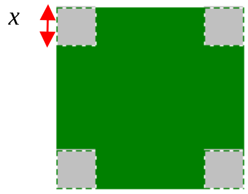
تمرين1: أحسب النهايات التالية

- $l_1 = \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 5x + 7$
- $l_2 = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 7x + 1$
- $l_3 = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x + 6}{2x^3 - 3}$
- $l_4 = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$
- $l_5 = \lim\limits_{x\to -\infty} -2x^7 + 8x^3 - 2x^2 + 1$
- $l_6 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $l_7 = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$
- $l_8 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
- $l_9 = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x - 4}{x^3 - 7x + 2}$
- $l_{10} = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - 3x$
- $l_{11} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - 7}{x - 3}$
- $l_{12} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$
- $l_{13} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{x}$
- $l_{14} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x \times \cos x}$
- $l_{15} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x - 1}$
- $l_{16} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - 2x + 3}{x - 3}$

تمرين 2

نريد صنع علبة بالطيّ انطلاقا من قطعة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها $18\,cm$. نقطع من كلّ ركن للقطعة المعدنية مربعا ضلعه x





1) عبّر عن الحجم V بدلالة x. نضع $V = f(x)$
2) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟ استنتج D_f مجموعة تعريف f
3) حدد القيمة القصوى للحجم V

تمرين3

لتكن f دالة عددية بحيث: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$

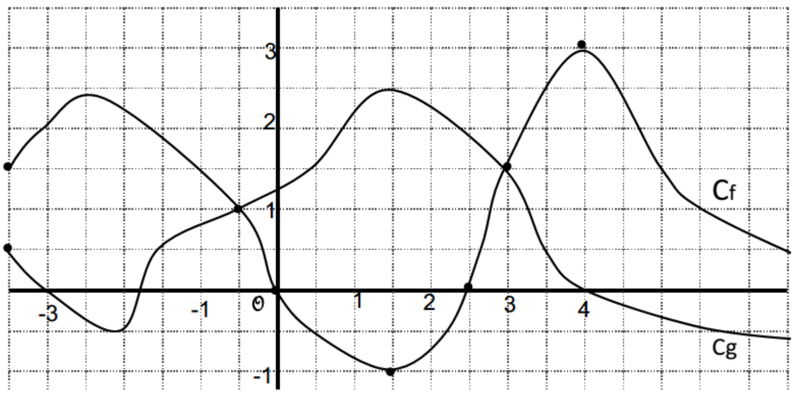
1) أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
2) أدرس قابلية اشتقاق f على D_f
3) أحسب $f'(x)$ ثم اعط جدول تغيرات f
4) حدد معادلة المستقيم المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 2
5) أحسب $f''(x)$ ثم أدرس تقعر (C_f) وحدد نقط انعطافه إن وجدت

تمرين 2:

لتكن f و g دالتين معرفتين على $]-3,5\ ;+\infty[$ و $m \in IR$

انطلاقا من التمثيل المبياني أجب عن الأسئلة التالية

1) حل المعادلة $f(x) = 0$



2) حل المعادلة $f(x) = g(x)$
3) حل المتراجحة $f(x) \leq g(x)$
4) ادرس إشارة الدالة f
5) حدد عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

إذا لم تتعب من أجل ما تريد ، فلا تبكي على ما خسرت

If you don't fight for what you want , then don't cry for what you lost

الدرس 1

Continuité d’une fonctions اتصال دالة عددية

1) اتصال دالة في نقطة a — Continuité d’une fonction en un point

تعريف1: لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I
نقول إن f دالة متصلة في a إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

تعريف2: لتكن f دالة معرفة على مجال $I=[a;a+\alpha[$ بحيث $\alpha>0$
نقول إن f متصلة على اليمين في a إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

خاصية: f متصلة في a $\Leftrightarrow \left[\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)\right]$

2) اتصال دالة على مجال — Continuité d’une fonction sur un intervalle

تعريف3: ـ تكون الدالة f متصلة على مجال $]a\,;b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من نقطه
ـ تكون الدالة f متصلة على مجال $[a\,;b]$ إذا كانت متصلة على $]a\,;b[$ و متصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b

خاصيات: ـ كل دالة حدودية متصلة على IR
ـ الدوال الجذرية و الدالة tan دوال متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها .
ـ الدالتان cos و sin متصلتين على IR
ـ الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على IR^+ .

خاصيات: ـ إذا كانت f و g دوال متصلة على مجال I فإن $f+g$ و $f\times g$ دوال متصلة على I وكذلك $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ الدالتان متصلتان على I مع $((\forall x\in I):g(x)\neq 0)$
ـ إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J حيث $f(I)\subset J$ فإن الدالة gof متصلة على I

3) صورة مجال بدالة متصلة — Image d’un intervalle par une fonction continue

خاصية: ـ صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة و صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

ملاحظة: إذا كانت f متصلة على قطعة $[a\,;b]$ فإن $f([a\,;b])=[m;M]$
بحيث M و m هما القيمتين القصوى والدنيا للدالة f على $[a\,;b]$

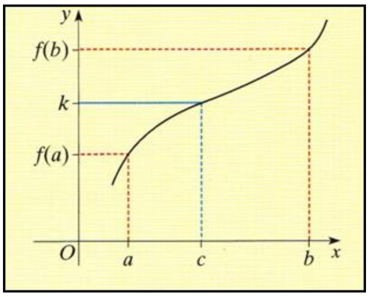
- **لتكن f دالة متصلة و رتيبة على مجال I ، لدينا النتائج التالية:**

المجال I	$f(I)$ بحيث f تزايدية على I	$f(I)$ بحيث f تناقصية على I
$[a\,;b]$	$[f(a)\,;\,f(b)]$	$[f(b)\,;f(a)]$
$]a\,;b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim_{x\to a^+} f(x)[$
$]a\,;b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x)\,;\lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a\,;+\infty[$	$[f(a);\lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty} f(x)\,;\,f(a)]$
$]-\infty\,;a[$	$]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim_{x\to a^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to a^-} f(x)\,;\lim_{x\to-\infty} f(x)[$

4) مبرهنة القيم الوسيطية — Théorème des valeurs intermédiaires

تمهيد: إذا كانت f متصلة على قطعة $[a\,;b]$ فإن $f([a\,;b])=[m;M]$

إذن لكل k من $[m;M]$ يوجد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$



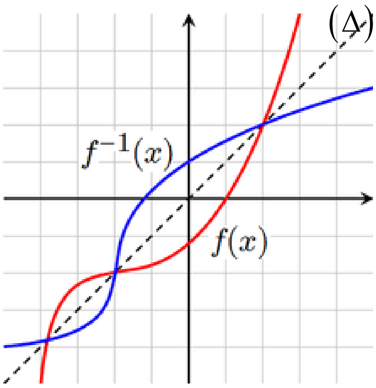
مبرهنة: إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$ و k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$

نتيجة1: إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ ،
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$

نتيجة2: إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة **قطعا** على مجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ ،
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا **وحيدا** في المجال $]a;b[$

و بعبارة أخرى: فإن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة في المجال $]a;b[$

5) الدالة العكسية — Fonction réciproque



اذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن:

1) $(\forall y\in f(I))(\exists!\ x\in I): f(x)=y$

2) f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال $J=f(\mathrm{I})$ نحو I

3) مهما يكن $y\in \mathrm{I}$ و $x\in J$ لدينا $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x$

4) $(\forall x\in J): f\circ f^{-1}(x)=x$ و $(\forall x\in \mathrm{I}): f^{-1}\circ f(x)=x$

5) f^{-1} متصلة على J و رتابتها على J هي نفس رتابة f على المجال I

6) (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$ (المنصف الأول)

6) دالة الجذر من الرتبة n — Fonction racine $n^{ième}$

- نعتبر الدالة العددية f بحيث $f(x)=x^n$ مع $n\in IN^*$ و $x\in IR^+$
- f دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ إذن f تقبل دالة عكسية معرفة من IR^+ نحو IR^+

تعريف: الدالة العكسية للدالة $f: x\mapsto x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ويرمز لها بـــ : $\sqrt[n]{\ }$ بحيث $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

خاصيات: لكل x و y من IR^+ ولكل m و n من IN^* لدينا:

$\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x>y$	$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$	$y=\sqrt[n]{x}\Leftrightarrow x=y^n$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ مع $y\neq 0$	$\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$
$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$	$\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$		$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$

خاصيـــة : إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

- اذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\ell>0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$

7) القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا — Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا و $r=\dfrac{m}{n}$ عددا جذريا بحيث n من IN^*

- العدد x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r بحيث $x^r=\sqrt[n]{x^m}$
- تمدد الخاصيات المتعلقة بالقوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية.

سلسلة تمارين

التمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} \; ; x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

حدد قيمة العدد α لكي تكون الدالة f متصلة في $x_0=0$

تذكير: $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ et $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$

التمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3} \; / \; x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-2x} \; / \; x>1 \quad et \quad f(1)=-1 \end{cases}$$

1) **بين أن f متصلة في النقطة $x_0=1$**

2) **ادرس اتصال f على IR**

التمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^5+x-\dfrac{1}{5}$

1) **بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $\alpha\in]0,1[$**

2) **حدد صورة كل مجال من المجالات التالية:** $[-1;1]$ و $[0;+\infty[$

التمرين 4

لتكن f الدالة المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x^2-2x+\frac{1}{2}$$

1) **تحقق أن:** $(\forall x\in I):f(x)=(x-1)^2-\dfrac{1}{2}$

2) **ليكن a و b عنصرين من المجال I**
بين أن: $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$

3) **بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده .**

4) **حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J**

التمرين 5

لتكن f دالة عددية بحيث : $f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$

1) **حدد D_f ثم احسب النهايات عند محداتها.**

2) **لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$**
(نقبل أن f تزايدية قطعا على I)

أ- **بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده**

ب- **حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.**

التمرين 6

احسب النهايات التالية:

$$B=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1} \qquad A=\lim_{x\to -\infty}\sqrt[3]{5-x^3}+x$$

$$D=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{4x^2+x}} \qquad C=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}-x}{x}$$

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1}-1} \qquad E=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

تذكير: $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ et $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

التمرين 7

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث :

$f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$

- **بين أنه يوجد c من المجال $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$**

تحديد قيم مقربة لحلول معادلة من النوع $f(x)=k$
(طريقة التفرع الثنائي La dichotomie)

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإن ـ حسب مبرهنة القيم الوسيطية ـ المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a;b[$.

ونعلم أن $m=\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.

1. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ ؟

2. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على التأطير المرغوب فيه.

التمرين 8

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=x^3+x-1$

1) **بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\alpha\in]0,1[$**

2) **حدد تأطيرا للعدد α سعته $0,125$**

"الانسان مشروع لا يوجد في سماء المشروعات مشروع مثله"
جان بول سارتر

Dérivabilité et étude de fonctions الاشتقاق و دراسة الدوال

1. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة — Dérivabilité d'une fonction en un point

تعريف1: لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I. نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. و العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a و نرمز له بالرمز $f'(a)$.

تعريف2: لتكن f دالة معرفة على مجال $[a\,;b[$ بحيث $b>a$. نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$. و العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في a على اليمين و نرمز له بـ $f'_d(a)$

خاصية1:
تكون f قابلة للاشتقاق في a **إذا وفقط إذا كانت** قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في a و $f'_d(a)=f'_g(a)$.

خاصية2: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في a فإنها متصلة في a

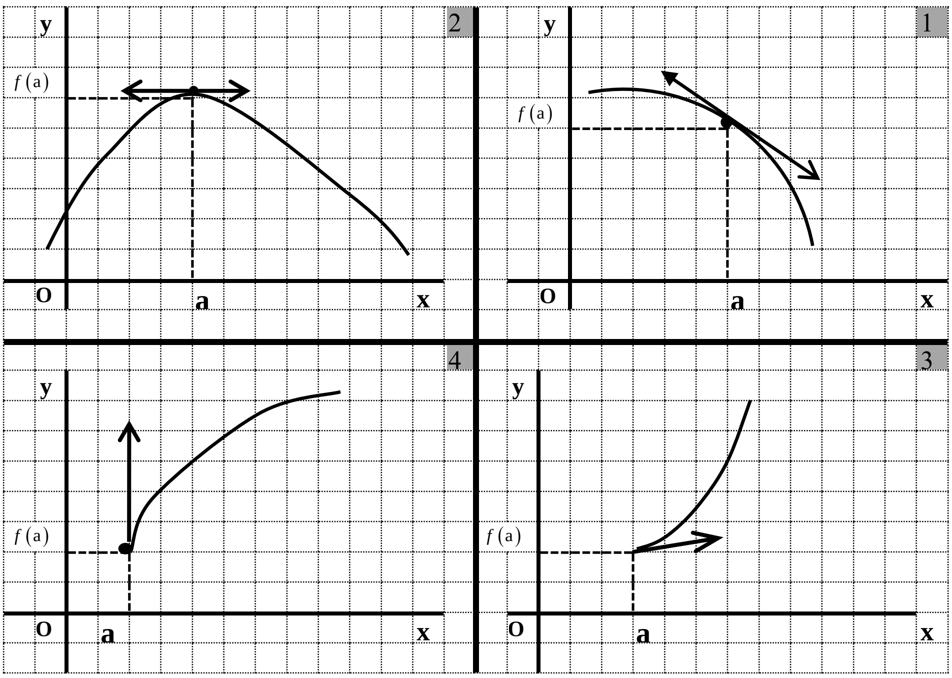
ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس صحيحا دائما . مثلا الدالة: $x\mapsto |x|$ متصلة في 0 ولكن غير قابلة للاشتقاق في 0

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق — Interprétation géométrique du nombre dérivé

تعريف وخاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في a و ليكن (C_f) منحناها في معلم $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$
المستقيم (T) المار من $A(a;f(a))$ ومعامله الموجه $f'(a)$ يسمى مماس المنحنى (C_f) في النقطة A
و معادلته هي: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ملاحظات:

1. الدالة $x\mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f بجوار a
2. إذا كان $f'(a)=0$ فإن معادلة المماس (T) هي: $y=f(a)$ (يعني مماس أفقي)
3. **إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a فإن (C_f) يقبل على يمين A نصف مماس معامله الموجه :** $f'_d(a)$
4. إذا كانت f **غير** قابلة للاشتقاق على اليمين في a فإن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي في A



3. قابلية اشتقاق دالة على مجال ـ حساب مشتقة دالة ـ مشتقة الدالة العكسية

خاصية3: ـ كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على IR

– الدوال الجذرية و الدالة tg دوال قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن حيز تعريفها .

– الدالتان $\cos$ و $\sin$ قابلتان للاشتقاق على IR

– الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$

خاصية4: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها متصلة عليه

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا مثلا الدالة: $x \mapsto |x|$

مشتقات بعض الدوال الاعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$x^r \ / \ r\in Q$	rx^{r-1}

عمليات على الدوال المشتقة:
لتكن u و v دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$k.u(x)$	$k.u'(x)$
$u(x)\times v(x)$	$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$u\,o\,v(x)$	$u'(v(x))\times v'(x)$ مشتقة مركب دالتين
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n.\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$
$(u(x))^n$	$n(u(x))^{n-1}\times u'(x)$
$u^{-1}(x)$	$\frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$ مشتقة د العكسية
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

4 ـ تطبيقات الدالة المشتقة — Applications de la fonction dérivée

أ ـ المشتقة و رتابة دالة على مجال

خاصية5: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

ـ تكون f تزايدية على المجال I **إذا وفقط إذا كان** $f'(x)\geq 0$ لكل x من I

ـ تكون f تناقصية على المجال I **إذا وفقط إذا كان** $f'(x)\leq 0$ لكل x من I

ملاحظة: إذا كان $f'(x)\geq 0$ لكل x من I و f' تنعدم في نقط **معدودة** فإن f تزايدية **قطعا** على المجال I

ب ــ المشتقة و مطاريف دالة

> **خاصية6:** لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصر من I.
> ــ إذا كان $f'(a)=0$ و f' تغير إشارتها بجوار a فإن f تقبل مطرافا هو $f(a)$

ملاحظة: إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن f تقبل مطرافا في a

ج ــ التقعر ونقط الانعطاف

> **خاصية7:** لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و a عنصر من I.
> - إذا كان $(\forall x\in I):\ f''(x)\geq 0$ فإن تقعر (C_f) موجه نحو الأراتيب الموجبة
> - إذا كان $(\forall x\in I):\ f''(x)\leq 0$ فإن تقعر (C_f) موجه نحو الأراتيب السالبة
> - إذا كان $f''(a)=0$ وَ f'' تغير إشارتها في a فإن $A(a;f(a))$ نقطة انعطاف لـِ (C_f)

ملاحظة: إذا كان $f''(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

ــ إذا كان $f'(a)=0$ و f' **لا تغير** إشارتها في a فإن $A(a;f(a))$ نقطة انعطاف لـِ (C_f)

5. دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومنحنى دالة — Etude du position relative d'une droite et une courbe

ــ لدراسة الوضع النسبي لمستقيم $(D):y=ax+b$ والمنحنى (C_f)، نبسط الصيغة التالية $f(x)-y$ ثم ندرس إشارتها. فإذا كان العدد $f(x)-y$ **موجبا** فإن (C_f) **فوق** (D) ، وإذا كان **سالبا** فإنه **تحت** (D).

6. الفروع اللانهائية — Branches infinies

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$ ⟷ (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته: $y=ax+b$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ⟷ (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته: $x=a$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ⟷ (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته: $y=b$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ← (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ مع $a\neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$ ← (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته: $y=ax+b$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty$ ← (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته: $y=ax$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$ ← (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

7. زوجية دالة عددية ـ عناصر تماثل منحنى دالة ـ الدالة الدورية

- نقول إنّ f دالة زوجية إذا كان D_f متماثلا بالنسبة لـ 0 و $\left(\forall x \in D_f\right): f(-x) = f(x)$
- نقول إنّ f دالة فردية إذا كان D_f متماثلا بالنسبة لـ 0 و $\left(\forall x \in D_f\right): f(-x) = -f(x)$
- منحنى دالة زوجية متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب
- منحنى دالة فردية متماثل بالنسبة لأصل المعلم
- النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل لـ (C_f) إذا كان لكل x من D_f : $(2a-x) \in D_f$ و $f(2a-x) = 2b - f(x)$
- المستقيم $(\Delta): x = a$ محور تماثل لـ (C_f) إذا كان لكل x من D_f : $(2a-x) \in D_f$ و $f(2a-x) = f(x)$
- نقول إنّ f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي $T > 0$ بحيث لكل x من D_f لدينا:

$(x+T) \in D_f$ و $f(x+T) = f(x)$. و العدد T يسمى دورا للدالة f

سلسلة تمارين

التمرين 1

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بمايلي:

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f واحسب النهايات عند محدات D_f.
2) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى (C_f).
3) أ- احسب $f'(x)$.
ب- أعط جدول تغيرات f .
4) حدد تقاطع (C_f) مع محوري المعلم.
5) أدرس تقعر (C_f).
6) بين أن النقطة $\Omega(1,3)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f).
7) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

التمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2) احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائج .

3) بين أنه لكل x من D_f لدينا: $f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$
4) أ- بين أنه لكل x من D_f لدينا: $f'(x) = \frac{4\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

ب- استنتج جدول التغيرات.

5) نقبل أنه لكل x من D_f : $f''(x) = \frac{8x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

- أدرس تقعر المنحنى (C_f).

6) أعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(0;3)$
7) أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

التمرين 3 — فرض منزلي

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2) احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ ثم

أعط تأويلا هندسيا للنتائج .

3) أ- بين أنه لكل x من D_f لدينا:

$$f(x) = x + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب- أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ج- أحسب $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) - x$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

د- حدد الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = x$

4) أ- بين أنه لكل x من D_f لدينا:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3}$$

ب- استنتج جدول التغيرات

5) بين أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل على المجال $\left]\frac{-4}{3},\frac{-5}{4}\right[$ في نقطة وحيدة .

6) أ- بين أنه لكل x من D_f لدينا: $f''(x)=\frac{6(x+2)}{(x+1)^4}$

ب- أدرس تقعر (C_f) وحدد نقط انعطافه .

ج- أعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(-2,-4)$

7) أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 4

f دالة معرفة على $D=]-2;-1]\cup[1;+\infty[$ كالتالي:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

2) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 1 و يسار -1 ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجتين.

3) أحسب $f'(x)$ ثم اعط جدول التغيرات.

4) أنشئ (C_f) في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) لتكن g قصور f على المجال $I=]-2\ ;\ -1]$

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده .

ب- أنشئ $C_{g^{-1}}$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 5

I) نعتبر الدالة g المعرفة كالتالي :

$$(\forall x>-1):\ g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1) أدرس تغيرات الدالة g على $I=]-1;+\infty[$

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1;\ 2[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على I

II) f دالة معرفة على I كالتالي: $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$

(C_f) تمثيلها المبياني في م. م. و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ثم أعط تأويلا مبيانيا للنتيجتين

2) أ- بين أن: $(\forall x\in I):\ f'(x)=\frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب - استنتج جدول تغيرات f

3) حدد معادلة المماس لـــ (C_f) في $A(0;1)$

4) أ - تحقق أن:

$$(\forall x>-1):\ f(x)-(-x+1)=\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

ب - استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و $(\Delta):\ y=-x+1$

5) انشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

التمرين 6

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي:

$$g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) حل في IR المعادلة $g(x)=0$. ثم استنتج إشارة g على IR.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ :

$$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

2) بين أن: $(D):y=-3x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

3) بين أن: $(\Delta):y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4) بين أن : $(\forall x\in IR):\ f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

5) استنتج جدول تغيرات الدالة f.

6) أدرس الوضع النسبي لـــ (C_f) و (D)

7) أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الوقت كالسيف ، إن لم تقطعه قطعك

Les suites numériques المتتاليات العددية

Notion d'une suite numérique — 1. مفهوم متتالية عددية

تعريف: ليكن I جزءا من IN ، كل دالة u معرفة على I تسمى متتالية و نرمز لها بـ $(u_n)_{n\in I}$

ملاحظات: ـــ نرمز للعدد $u(n)$ بالرمز u_n

ـــ u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in I}$

ـــ اذا كان $I = IN$ نرمز عادة للمتتالية $(u_n)_{n\in I}$ بأحد الرمزين $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n)

ـــ لا ينبغي الخلط بين العدد u_n و المتتالية (u_n)

ـــ تُحدد متتالية إذا عُلّمت حدودها أو العلاقة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها

Monotonie d'une suite numérique — 2. رتابة متتالية عددية

ليكن I جزءا من IN بحيث $I = \{n \in IN \ / \ n \geq p \ \ avec \ \ p \in IN\}$

	تزايدية إذا وفقط إذا كان	تناقصية إذا وفقط إذا كان
متتالية $(u_n)_{n\geq p}$	$(\forall n \geq p):\ u_{n+1} \geq u_n$	$(\forall n \geq p):\ u_{n+1} \leq u_n$

Suite (majorée – minorée - bornée) 9 — 3. متتالية مكبورة ـ متتالية مصغورة ـ متتالية محدودة

	مكبورة	مصغورة	محدودة
متتالية $(u_n)_{n\geq p}$	إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $(\forall n \geq p): u_n \leq M$	إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $(\forall n \geq p): u_n \geq m$	إذا كانت مكبورة و مصغورة

Suite arithmétique – Suite géométrique — 4. متتالية حسابية ـ متتالية هندسية

	حسابية	هندسية
متتالية $(u_n)_{n\geq p}$	إذا وجد عدد حقيقي r بحيث $(\forall n \geq p): u_{n+1} - u_n = r$ r يسمى اساس المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$	إذا وجد عدد حقيقي q بحيث $(\forall n \geq p): u_{n+1} = q\, u_n$ q يسمى اساس المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$
الحد العام لمتتالية	$(\forall n \geq p): u_n = u_p + (n-p)r$	$(\forall n \geq p): u_n = u_p \times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة لمتتالية	$S = \left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)(n-p+1)$	$S = u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$ مع $q \neq 1$

بحيث $S = u_p + u_{p+1} + \dots\dots + u_{n-1} + u_n$

Limite d'une suite numérique — 5. نهاية متتالية عددية

أ ـــ نهايات اعتيادية : ليكن p من IN^* لدينا ما يلي:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$

ب ـــ نهاية متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq p}$ بحيث $u_n = q^n$

- إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq p}$ لا تقبل نهاية

ج ـــ النهايات والترتيب

خاصية1: نعتبر المتتاليات (u_n) وَ (v_n) وَ (w_n) و ليكن l عددا حقيقيا.

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ وَ $v_n \le u_n \le w_n$: $(\forall n \ge p)$ فإن (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

نتيجـــة : نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) و ليكن l عددا حقيقيا.

- إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ وَ $|u_n - l| \le v_n$: $(\forall n \ge p)$ فإن (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

خاصية2: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين .

- إذا كان $v_n \le u_n$: $(\forall n \ge p)$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

6. تقارب متتالية عددية — Convergence d'une suite numérique

تعريف: ــ كل متتالية نهايتها منتهية تسمى متتالية متقاربة

ــ كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

خاصية1: ــ كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة

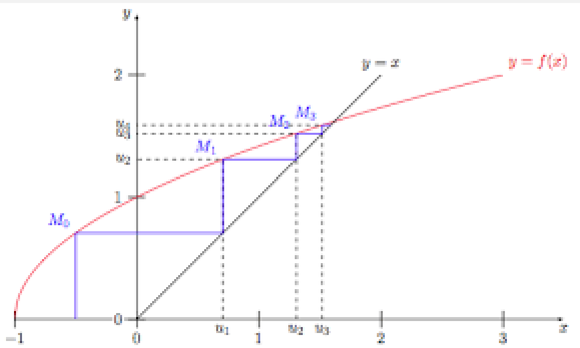
ــ كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

7. متتالية ترجعية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$ — Suite récurrente de type

خاصية: لتكن f دالة معرفة على مجال I وَ $(u_n)_{n\ge p}$ متتالية معرفة كالتالي : $u_p \in I$ وَ $u_{n+1} = f(u_n)$: $(\forall n \ge p)$

- اذا كانت f دالة متصلة على I وَ $f(I) \subset I$
- وَ $(u_n)_{n\ge p}$ متتالية متقاربة

فإن نهاية $(u_n)_{n\ge p}$ حل للمعادلة $f(x) = x$



مبدأ الترجع: للبرهان على صحة خاصية $P(n)$ من أجل كل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي من $P(n_0)$.
2. نفترض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة (فرضية الترجع)
3. نبرهن على أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$. أي $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

سلسلة تمارين المتتاليات

التمرين الأول: الدورة الاستدراكية 2013

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \quad \text{لكل } n \text{ من } IN$$

1) تحقق أن: $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ لكل n من IN

2) أ ــ بين أن $u_n > 1$ لكل n من IN

ب ــ بين أن المتتالية (u_n) تناقصية

ج ــ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

3) نعتبر المتتالية (v_n) بحيث $v_n = u_n - 1$ لكل n من IN

أ ــ بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها .

ب ــ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الثاني: الدورة العادية 2016

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \quad \text{لكل } n \text{ من } IN$$

و المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي: $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل من IN

1) بين أن $u_n < 3$ لكل n من IN

2) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم حدد v_n بدلالة n

3) بين أن $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من IN ثم استنتج u_n بدلالة n

4) حدد نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـــ :

$$u_0 = -1 \quad \text{و} \quad (\forall n \in IN): u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$$

ولتكن (v_n) متتالية بحيث : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها

2) عبر عن v_n وَ u_n بدلالة n .

3) حدد نهاية المتتالية (u_n)

4) احسب : $S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{100}$

التمرين الرابع:

الجزء A- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$$

1) بين أن f تزايدية على IR^+

2) حل في IR المعادلة $f(x) = x$

3) بين أن: $(\forall x \in [0;1[): f(x) > x$

الجزء B- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{وَ} \quad (\forall n \in IN): u_{n+1} = f(u_n)$$

1) بين أن : $0 \le u_n \le 1$ لكل n من IN

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء C- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in IN): v_n = u_n^2 - 1$$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

2) حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

3) احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) حدد:

$S_1 = v_1 + v_2 + ... + v_n$ وَ $S_2 = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$

بدلالة n

5) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_1$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_2$

تمارين الدوال الأصلية

التمرين الأول:

الدالتين f و F معرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} \quad \text{و} \quad F(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x$$

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $]-3;+\infty[$

التمرين الثاني:

F و G دالتين معرفتين على $]3;+\infty[$ بـــ :

$$F(x) = \frac{x+2}{x-3} + 4 \quad \text{و} \quad G(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

- باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

التمرين الثالث:

حدد الدالة F الدالة الأصلية لـ f على المجال I التي تحقق $F(x_0) = y_0$

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 1$

بحيث $I = IR$ و $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$

2) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$

بحيث $I =]0;+\infty[$ و $x_0 = 1$ و $y_0 = 0$

3) $f(x) = x^2(x^3+1)^2$

بحيث $I = IR$ و $x_0 = 0$ و $y_0 = 3$

4) $f(x) = \cos x \times \sin x$

بحيث $I = IR$ و $x_0 = \pi$ و $y_0 = 1$

5) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

بحيث $I =]1;+\infty[$ و $x_0 = \sqrt{5}$ و $y_0 = 0$

6) $f(x) = \tan^2 x$

بحيث $I = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ و $x_0 = 0$ و $y_0 = 3$

اذا طُعِنْت من الخلف ، فاعلم أنك في المقدمة

الدوال الأصلية Fonctions primitives

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث: $(\forall x \in I): F'(x) = f(x)$

خاصيات : * إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإنها تقبل دوالا أصلية على I.

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x \mapsto F(x)+k$

حيث k عدد حقيقي ثابت.

خاصية: إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و x_0 عنصر من I و y_0 عدد حقيقي.

فإنه توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و r عددا جذريا ، لدينا ما يلي:

الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

$f(x)=....$	$F(x)=.....$
a	$ax+c$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$
$(n\neq -1)$; x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$
$(n\geq 2)$; $\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
x^r (مع $r\neq -1$)	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$1+\tan^2 x$	$\tan x+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$
e^x	e^x+c

العمليات على الدوال الأصلية

f	$F+c$
$u'\times u$	$\frac{1}{2}u^2+c$
$u'\times u^n$ مع $(n\neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$
$u'\times\sin(u)$	$-\cos(u)+c$
$u'\times\cos(u)$	$\sin(u)+c$
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)+c$
$(n\geq 2)$ $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$
$u'\times u^r$ (مع $r\neq -1$)	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$
$\frac{u'}{\sqrt[3]{u^2}}$	$3\sqrt[3]{u}+c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$
$u'\times e^u$	e^u+c

الدوال اللوغاريتمية Fonctions logarithmes

نشاط :

1) بين أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ تقبل دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$

تعريف : الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري و نرمز لها بـ ln

2) بناء على ماسبق استنتج: $D_{\ln}$ و $\ln(1)$ و أن ln دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

3) بين أن الدالة ln تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ ثم ادرس اشارة الدالة ln

4) ليكن a عنصرا من $]0;+\infty[$ و f دالة عددية بحيث:

$$(\forall x>0):\ f(x)=\ln(a.x)$$

أ ـ بين أن f دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب ـ استنتج أن : $(\forall x>0):\ \ln(a.x)=\ln(x)+\ln(a)$

ج ـ استنتج أن: $\ln(a.b)=\ln a+\ln b$

و $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد e من المجال $]2,71;2,72[$ بحيث $\ln(e)=1$

6) بين أن: $(\forall n\in IN):\ln(x^n)=n.\ln(x)$

ثم استنتج أن $(\forall n\in IN):\ln(e^n)=n$

7) نقبل أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ استنتج أن $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ (يمكنك وضع $x=\frac{1}{t}$) ثم أول النتيجة هندسيا

8) لتكن g دالة بحيث: $(\forall x\ge 1):g(x)=\ln(x)-\sqrt{x-1}$

أ ـ بين أن g تناقصية قطعا على $]1;+\infty[$ ثم استنتج إشارتها

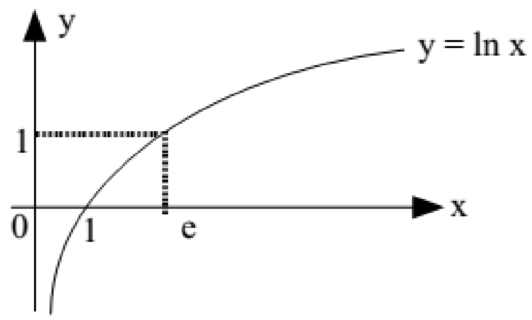
ب ـ تحقق أن $(\forall x\ge 1):\ 0\le\frac{\ln(x)}{x}\le\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا

ج ـ حدد $\lim\limits_{x\to0^+}x.\ln x$ (يمكنك وضع $x=\frac{1}{t}$)

9) احسب $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}$ ثم حدد معادلة المماس لـ $(C_{\ln})$ في النقطة $A(1;0)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

10) أدرس تقعر $(C_{\ln})$ ثم أنشئه في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



11) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x\in I):u(x)\neq 0$

ـ بين أن: $(\forall x\in I):(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

دالة اللوغاريتم النبيري Fonction logarithme népérien

خاصيات: ليكن x و y عنصرين من المجال $]0;+\infty[$. لدينا:

$\ln(1)=0$	$\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y$	$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
$\ln(e)=1$	$\ln(x)<\ln(y)\Leftrightarrow x<y$	$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	$\ln(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$	$\ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln(y)$
$\ln(x)=0\Leftrightarrow x=1$	$\ln(x)>0\Leftrightarrow x>1$	$(\forall r\in Q):\ln(x^r)=r\ln(x)$

نهايات أساسية: ليكن r عددا جذريا موجبا

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0^-$	$(\forall r>0):\ \lim\limits_{x\to0^+}x^r\ln(x)=0^-$
$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0^+$	$(\forall r>0):\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^r}=0^+$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $(\forall x \in I): u(x) \neq 0$ فإن الدالة $f: x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

تعريف : (دالة اللوغاريتم ذات الأساس a) : ليكن $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

الدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ تسمى دالة اللوغاريتم ذات الأساس a و نرمز لها بـ : $\log_a$ ونكتب : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

حالة خاصة : نرمز لدالة اللوغاريتم ذات الأساس 10 باختصار بالرمز **log**

سلسلة تمارين

تمرين 1

حل في IR المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$

2) $\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$

3) $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$

4) $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 \leq 0$

5) $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$

تمرين 2

حدد مجموعة تعريف الدالة f

1) $f(x) = (\ln(x) - 2)\sqrt{4-x}$

2) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

3) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - \ln x}$

تمرين 3

احسب النهايات التالية

$B = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x}$ $\quad A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

$D = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+4x)}{x}$ $\quad C = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$

$F = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)\ln x}{x^2 - 1}$ $\quad E = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

$H = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$ $\quad G = \lim\limits_{x \to 0^+} x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$(\forall x \in]0;+\infty[): f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة : 1cm).

1) أحسب : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ثم اعط تاويلا هندسيا للنتيجة

2) أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم اعط تاويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[): f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^3}$

ب- اعط جدول تغيرات f .

4) حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

5) أنشىء (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(نقبل أن (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 2)

تمرين 4

I. لتكن g دالة معرفة على $I =]0;+\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = x - 1 + \ln x$$

أ- احسب $g'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات g على I

ب- تحقق أن $g(1) = 0$. ثم أدرس إشارة $g(x)$.

II. لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \dfrac{x-1}{x} \times \ln x$$

و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) أحسب : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ثم اعط تاويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم اعط تاويلا هندسيا للنتيجة

4) أ- بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[): f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- اعط جدول تغيرات f .

5) أنشىء (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Evry one thinks of changing the word , but no one thinks of chinging himself.

الدرس 6

Fonctions exponentielles الدوال الأسية

نشاط

1) بين أن الدالة $\ln$ تقبل دالة عكسية معرفة على IR

تعريف : الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بـالرمز: $\exp$

2) احسب $\exp(0)$ و $\exp(1)$

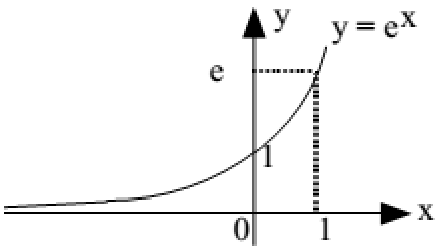
3) بين أن الدالة $\exp$ متصلة و تزايدية قطعا على IR

4) بين أن: $\exp(x)\times\exp(y)=\exp(x+y)$ و $\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}=\exp(x-y)$ و $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

5) انشئ منحنى الدالة $\exp$ في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

6) استنتج: $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp(x)}{x}$

7) حدد $\exp'(x)$ و $\left(\exp(u(x))\right)'$ بحيث u دالة قابلة للاشتقاق



8) حدد $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(x)-1}{x}$

9) بين أن: $(\forall r\in Q):\exp(r)=e^r$

الدالة الأسية النبيرية Fonction exponentielle népérienne

تعريف: الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز $\exp$ أو $x\mapsto e^x$ بحيث:
$(\forall x\in IR)(\forall y\in]0;+\infty[):\ e^x=y\Leftrightarrow x=\ln(y)$ مع $e\simeq 2,71828...$

خاصيات: ليكن x و y عنصرين من IR. لدينا:

$e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$	$e^x<e^y\Leftrightarrow x<y$	$e^x>0$	$(e^x)'=e^x$	$\ln(e^x)=x$
$(e^x)^y=e^{x\times y}$	$e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$	$e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$	$e^{x+y}=e^x\times e^y$	$(\forall x>0):e^{\ln(x)}=x$

نهايات أساسية:

$(\forall r>0):\lim\limits_{x\to-\infty}x^r.e^x=0^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$
$(\forall r\in Q):\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^r}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$	$(\forall n\in IN^*):\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$

خاصية: إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و : $(\forall x\in\mathrm{I}):\ f'(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$

تعريف (الدالة الأسية للأساس a) : ليكن $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ و $x\in IR$
الدالة $x\mapsto a^x$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_a$ وتسمى الدالة الأسية للأساس a ونرمز لهابـ $\exp_a$ بحيث : $\exp_a(x)=e^{x.\ln a}$

سلسلة تمارين

تمرين 1

احسب النهايات التالية

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} \qquad B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{x^{2}+x}$$

$$C=\lim_{x\to 0}=\frac{e^{x}-e^{2x}}{x} \qquad D=\lim_{x\to+\infty}x^{2}-e^{x}$$

$$E=\lim_{x\to-\infty}(x^{2}-x)e^{x} \qquad F=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{-x}$$

تمرين 2

لتكن f دالة معرفة على IR^{*} بما يلي: $f(x)=x-\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

1) بين أن f دالة فردية
2) حدد D مجموعة دراسة الدالة f
3) احسب $\lim_{x\to 0^{+}}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
4) بين أن f دالة تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$
5) بين أن $(\Delta): y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$
6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$
7) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 3

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي :

$$g(x)=1-x+e^{x}$$

1) احسب $g'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات g على IR
2) بين أن $g(x)>0$ لكل x من IR

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=x+1+xe^{-x}$$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2cm).

1) أ- بين أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

ب- بين أن $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة

2) أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3) أ- بين أن : $f'(x)=e^{-x}.g(x)$ لكل x من IR

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]-1;0[$

5) أ-بين أن المستقيم $(T): y=2x+1$ مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0.

ب-ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T)

6) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها 2

7) أنشئ (D) و (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 4

لتكن f دالة عددية بحيث :

$$(\forall x\in IR): f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

و ليكن (C_f) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- بين أن: $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$

ب- بين أن: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

ج- تحقق أن المستقيم $(D): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

د- حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)

3) أ- بين أن $(\forall x\in IR): f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- ادرس تقعر المنحنى (C_f)

د- حدد α أفصول نقطة تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

4) أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 5 فرض منزلي

الجزء A: نعتبر الدالة g المعرفة على $I=[0;+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$$

1) أ- بين أن: $g'(x)=\dfrac{-x}{(x+1)^{2}}$ لكل x من I .

ب- استنتج أن الدالة g تناقصية على I .

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج أن :

$$(\forall x\in[0;+\infty[): g(x)\le 0$$

الجزء B: نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) بين أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$. ثم أول النتيجة هندسيا

(يمكنك وضع $e^{x}=t$).

2) أ ـ بين أن $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\times\ln\left(\frac{1}{e^{x}}+1\right)$ لكل x من IR

ب ـ بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. ثم أول النتيجة هندسيا

3) أ ـ بين أن : $(\forall x\in IR): f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$.

ب ـ استنتج أن f تناقصية قطعا على IR

ج ـ اعط جدول تغيرات الدالة f على IR .

4) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

5) أنشئ (C_f) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(نقبل أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها 0)

6) أ - بين أن : $(\forall x\in IR)\ f'(x)+f(x)=1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

ب ـ حدد الدالة الأصلية F للدالة f و التي تنعدم في 0 .

ج ـ حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=0$ و $x=\ln 2$

7) أ ـ بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده .

ب ـ أحسب $f(0)$ و $f^{-1}(\ln 2)$

ج ـ أنشئ منحنى الدالة f^{-1} في المعلم السابق

تمرين 6 **الامتحان الوطني 2008 د . عادية**	

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي :

$$g(x)=e^{2x}-2x$$

1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من IR (لاحظ أن $g(0)=1$)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب- تحقق من أن

$$\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$ لكل x من IR^{*}

ج- بين أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

د- استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $-\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- لكل x من $[0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$

وأن $2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)=f(x)$

ب- استنتج أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ج- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

د- بين أن : $f(x)-2x\le 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

واستنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $[0,+\infty[$

3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$ لكل x من IR

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف) .

تمرين 7	

لتكن الدالة **f** المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{x}-1}$$

1) حدد العددين الحقيقيين **a** و **b** بحيث يكون لدينا .

لكل **x** من $]0;+\infty[$: $f(x)=e^{x}+a+\frac{be^{x}}{e^{x}-1}$

2) استنتج دالة أصلية للدالة **f** على $]0;+\infty[$

تمرين 8	

لتكن الدالة **f** المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x)=(2x^{2}-7x+5)e^{x}$$

1.احسب الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة **f** .

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي **x** :

$$f(x)=4e^{x}+2f'(x)-f''(x)$$

3.استنتج دالة أصلية للدالة **f** على IR

لا يصل الناس إلى حديقة النجاح دون أن يمروا بمحطات التعب و الفشل و اليأس ، و صاحب الارادة القوية لا يطيل الوقوف في هذه المحطات

Calcul intégral — الحساب التكاملي

I. تكامل دالة متصلة على قطعة — Intégrale d'une fonction continue sur un segment

تعريف : لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية لها على $[a;b]$ لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

أمثلة: أحسب التكاملات التالية

$$A=\int_1^2 \frac{1}{2}x+3dx \quad \text{و} \quad B=\int_0^{\pi}\sin x.dx \quad \text{و} \quad C=\int_1^e \frac{\ln x}{x}.dx \quad \text{و} \quad D=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \quad \text{و} \quad E=\int_0^1 x.e^{x^2}\,dx$$

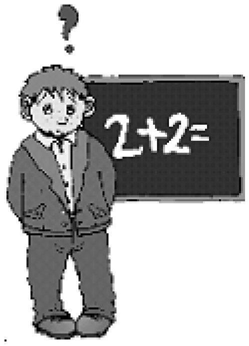
II. خاصيات : لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b من I

(1 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad et \quad \int_a^a f(x)dx=0$

(2 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

(3 $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x).dx+\int_a^b g(x)dx$

(4 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ علاقة شال



مثال: أحسب التكامل التالي . $I=\int_1^2 |x-1|.dx$

(5 الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم في a هي الدالة F بحيث: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ مع $F'(x)=f(x)$

III. التكامل و الترتيب — Intégrale et ordre

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$ حيث $a<b$ لدينا:

- $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ و $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$
- اذا كان لدينا $m\le f(x)\le M$ فإن $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$
- العدد $A=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى **القيمة المتوسطة** للدالة f على المجال $[a;b]$

IV. تقنيات لحساب تكامل : — Techniques de calcul d' intégrale

- استعمال الدوال الأصلية مباشرة
- كتابة دالة جذرية كمجموع دوال جذرية

تطبيق : - بين أن: $\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}=2+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}$ ثم استنتج قيمة التكامل $I=\int_3^4 \frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}dx$

- إخطاط دوال مثلثية (أنظر درس الأعداد العقدية)
- **المكاملة بالأجزاء :** لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ و u' و v' متصلتان على $[a;b]$

لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

أمثلة: أحسب التكاملات التالية

$$A=\int_1^e x(\ln x)dx \quad \text{و} \quad B=\int_0^1 xe^x dx \quad \text{و} \quad C=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\cdot dt \quad \text{و} \quad D=\int_1^e (\ln x)^2 dx \quad \text{و} \quad E=\int_1^e \ln x.dx$$

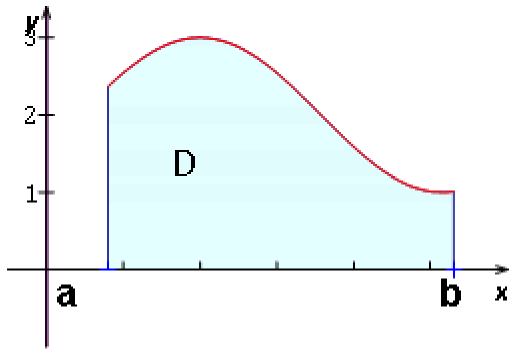
ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ممنظما و $a<b$

أ- المساحات :

- اذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فان مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل والمستقيمين $(D_1):x=a$ و $(D_2):x=b$

هي $\boxed{D=\int_a^b |f(x)|\,dx\ (u.a)}$

بحيث $(u.a)$ **هي وحدة قياس المساحة**



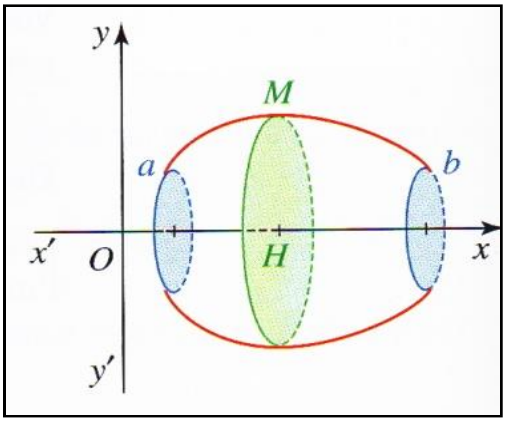
- اذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين $(D_1):x=a$ و $(D_2):x=b$ هي: $\boxed{\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\ \ (u.a)}$

ب- الحجم

- لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$.

إذا دار (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة فانه يولد مجسما دورانيا حجمه هو $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx\ \ (u.v)}$

بحيث $(u.v)$ **هي وحدة قياس الحجم**



سلسلة تمارين

تمرين1   **وطني 2017 د. عادية**

نعتبر أن $(\forall x\in]0;+\infty[):\ f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right).\ln x$

(1 **بين أن :** $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x}.dx=\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2$

(2 تحقق من أن $H:x\mapsto 2\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{2}{x}-1$ على $]0;+\infty[$

(3 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$A=\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right).\ln x.dx=(1-\ln 2)^2$$

(4 استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم $(T):y=x$ و المستقيمين $(\Delta):x=2$ **و** $(D):x=1$

تمرين 2   **وطني 2017 د. استدراكية**

نعتبر أن $(\forall x\in IR):\ f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$

(1 تحقق من أن $H:x\mapsto (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على IR

(2 **بين أن :** $\int_{-1}^0 xe^x.dx=\dfrac{2}{e}-1$

(3 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$I=\int_{-1}^0 (x^2+1).e^x.dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

(4 استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم $(T):y=x+1$ و المستقيم $(D):x=-1$ و محور الأراتيب

الدرس 8

Equations différentielles المعادلات التفاضلية

I. معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى — Equation différentielle du premier ordre

المعادلة	مجموعة الحلول
$y'=ay$	$y(x)=k\,e^{ax}\quad / \ (k\in IR)$
$y'=ay+b$	$y(x)=k\ e^{ax}-\dfrac{b}{a}\quad / \ (k\in IR)$

II. معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية — Equation différentielle du deuxième ordre

✓ لحل المعادلة $(E): y''+ay'+by=0$ نتبع المراحل التالية:

- المعادلة $r^2+ar+b=0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة (E)
- ليكن Δ مميز المعادلة المميزة :

المميز	فإن المعادلة المميزة تقبل	ومجموعة حلول المعادلة التفاضلية
اذا كان $\Delta>0$	حلين حقيقيين r_1 و r_2	$y(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}\quad / \quad (\alpha;\beta)\in IR^2$
اذا كان $\Delta=0$	حلا وحيدا مزدوجا هو $r=-\dfrac{b}{2a}$	$y(x)=(\alpha x+\beta)e^{rx}$ مع $(\alpha;\beta)\in IR^2$
اذا كان $\Delta<0$	حلين عقديين مترافقين: $r=p\pm iq$	$y(x)=e^{p(x)}(\alpha\cos(qx)+\beta\sin(qx))$

- **حالة خاصة :** حلول المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو الدوال y بحيث :

$$y(x)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)=A\cos(\omega x+\varphi)$$

خاصية: يوجد حل وحيد للمعادلة (E) يحقق الشرطين البدئيين $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=z_0$

بحيث: x_0 و y_0 و z_0 أعداد حقيقية معلومة

سلسلة تمارين

تمرين1

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E_1): y'-7y=0$

أ- حدد الحل العام للمعادلة (E_1)

ب- حدد الحل f للمعادلة (E_1) الذي يحقق الشرط البدئي: $f(0)=4$

تمرين2

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E_2): y''-2y'+1y=0$

أ- حدد الحل العام للمعادلة (E_2)

ب- حدد الحل f للمعادلة (E_2) الذي يحقق الشرطين البدئيين: $f(1)=0$ و $f'(0)=2$

تمرين3

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E_2): y''-4y'+3y=0$

أ- حدد الحل العام للمعادلة (E_2)

ب- حدد الحل f للمعادلة (E_2) الذي يحقق الشرطين البدئيين: $f(0)=0$ و $f'(0)=1$

تمرين4

نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E_3): y''-2y'+2y=0$

أ- حدد الحل العام للمعادلة (E_2)

ب- حدد الحل f للمعادلة (E_2) الذي يحقق الشرطين البدئيين: $f(0)=1$ و $f'(\frac{\pi}{2})=0$

ج- استنتج حساب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\times\cos x\,dx$

الدرس 9

Les nombres complexes — الأعداد العقدية

I) تعار يف ومصطلحات — Définitions et vocabulaires

1) مجموعة الأعداد العقدية هي مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ بحيث : $\mathbb{C} = \{ z = a + ib / \ a,b \in \mathbb{R}^2 \ et \ i^2 = -1 \}$

2) الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد z

- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب: $\mathrm{Re}(z) = a$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب: $\mathrm{Im}(z) = b$
- العدد ib يسمى عددا تخيليا صرفا ونقول إن $z \in iIR$

3) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ و $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

4) نضع $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ لدينا: $z = z' \Leftrightarrow (a = a' \ \ et \ \ b = b')$ و $z = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \ \ et \ \ b = 0)$

5) خصائص الجمع والضرب والقوى في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في المجموعة $\mathbb{C}$

- الشكل الجبري للمجموع : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- الشكل الجبري للجذاء $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

II) مرافق عدد عقدي — Conjugué d'un nombre complexe

تعريف: مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ هو العدد الذي نرمز له بـ $\overline{z}$ بحيث: $\overline{z} = a - ib$

خاصيات				
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$	$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$	$z \in IR \Leftrightarrow \overline{z} = z$	$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$	$z \in iIR \Leftrightarrow \overline{z} = -z$	$z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

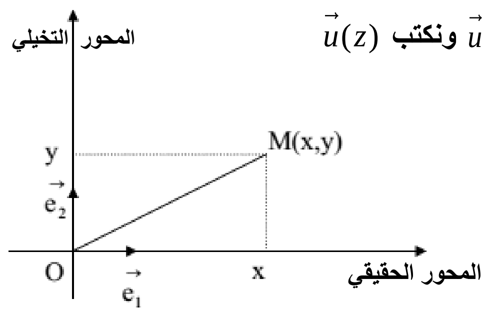
ملاحظة: مرافق عدد حقيقي هو نفسه و مرافق عدد تخيلي صرف هو مقابله .

III) التمثيل الهندسي لعدد عقدي — Représentation géométrique d'un nombre complexe

نعتبر أن المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

نربط كل عدد عقدي $z = x + iy$ بالنقطة $M(x, y)$ ونعتبر أن $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$

- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- المحور $(O, \vec{e_1})$ يسمى المحور الحقيقي والمحور $(O, \vec{e_2})$ يسمى المحور التخيلي
- $M(x, y)$ تسمى صورة العدد العقدي z ، والعدد z يسمى لَحْق النقطة M ونكتب $M(z)$
- $\vec{u}(x, y)$ تسمى الصورة المتجهية للعدد العقدي z و z يسمى لَحْق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $\vec{u}(z)$
- لحق مجموع المتجهتين $\vec{u}(z_1)$ و $\vec{v}(z_2)$ هو $z_1 + z_2$
- لحق المتجهة $k.\vec{u}$ بحيث $\vec{u}(z_1)$ هو العدد العقدي $k.z_1$
- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بحيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$ هو $z_B - z_A$
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$ و $OM = |z|$



IV) معيار عدد عقدي — Module d'un nombre complexe

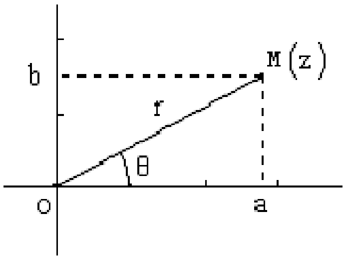
تعريف: معيار العدد العقدي $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\|z\| = \|\overline{z}\| = \|-z\| = \|-\overline{z}\|$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$	$\|z^n\| = \|z\|^n$
$\|z + z'\| \le \|z\| + \|z'\|$	$\|kz\| = \|k\| \times \|z\| \ \ / k \in \mathbb{R}$	$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$

V) الشـــكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم — Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م.مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$ و $z=a+ib$ بحيث $z\neq 0$ و لتكن $M(z)$ نقطة منه

- الكتابة: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ بحيث: $|z|=r$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z ونكتب باختصار: $z=[r,\theta]$



- العدد θ يسمى عمدة **argument** z نرمز له بـ $\arg z$ وهو قياس للزاوية $(\vec{i},\widehat{\overrightarrow{OM}})$
ونكتب $\arg z\equiv\theta[2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A})[2\pi]$

خاصيات : ليكن z و z' عنصرين من $\mathbb{C}$ لدينا:

$$\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$$
$$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$$
$$\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$$

ملاحظة: إذا كان a و b عددان حقيقيان فإن:

$$a>0\Rightarrow\arg(a)\equiv0[2\pi]$$
$$a<0\Rightarrow\arg(a)\equiv\pi[2\pi]$$
$$b>0\Rightarrow\arg(ib)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$b<0\Rightarrow\arg(ib)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

VI) الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم — Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

نعتبر $z=r.(\cos\theta+i\sin\theta)$ بحيث r عدد حقيقي موجب قطعا

بوضع $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ نحصل على $z=r.e^{i\theta}$ الترميز الأسي للعدد z

ولدينا $z^n=r^n.(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n.e^{i(n\theta)}=r^n.(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

اذن $\boxed{Moivre\quad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$

صيغتا أولير **Euler** $\boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ و $\boxed{\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

ملاحظة: "تستعمل صيغتا أولير لإخطاط الحدوديات المثلثية"

VII) كيف نحل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية ، بحيث $a\neq0$

إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين هما : $z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

VIII) التمثيل العقدي لتحويل اعتيادي — Représentation complexe d'une transformation usuelle

نعتبر $\vec{u}(t)$ و النقطة $\Omega(\omega)$ ولتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بتحويل اعتيادي

التحويل	المميزات	الترميز	الكتابة العقدية
الإزاحة T	المتجهة $\vec{u}$	$T_{\vec{u}}$	$z'=z+t$
التحاكي H	المركز Ω والنسبة k	$H(\Omega;k)$	$z'=k(z-\omega)+\omega$
الدوران R	المركز Ω والزاوية θ	$R(\Omega;\theta)$	$z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

إذا كان	فإن
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$	A و B و C نقط مستقيمية
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \times \dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$	A و B و C و D نقط متداورة
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	مجموعة النقط $M(z)$ هي واسط القطعة $[AB]$
$\lvert z - z_A \rvert = r$	مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $C(A;r)$

ملاحظة: لدراسة أو تحديد مجموعة نقط يمكن ان نعتبر $z = x + iy$

سلسلة تمارين

التمرين 1 : (الدورة الاستدراكية 2008)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 17 = 0$

2) نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى م. م م مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ النقطتين $A(a)$ و $B(b)$ بحيث: $a = 4 + i$ و $b = 8 + 3i$ و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M'(z')$ صورتها بالدوران R الذي مركزه النقطة $\Omega(1+2i)$ وزاويته هي $3\pi/2$

أ- بين أن : $z' = -iz - 1 + 3i$

ب- تحقق من أن لَحْق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c = -i$.

ج- بين أن : $b - c = 2(a - c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية

التمرين 2 : (الدورة العادية 2016)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2 - 4z + 29 = 0$

2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$. النقط A و B و Ω و التي ألحقاها على التوالي هي a و b و ω بحيث $a = 5 + 2i$ و $b = 5 + 8i$ و $\omega = 2 + 5i$.

أ- ليكن u العدد العقدي بحيث $u = b - \omega$.

تحقق من أن $u = 3 + 3i$ ثم بين أن $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

ب- حدد عمدة للعدد العقدي $\bar{u}$ ($\bar{u}$ يرمز لمرافق العدد العقدي u).

ج- تحقق من أن $a - \omega = \bar{u}$ ثم استنتج أن $\Omega A = \Omega B$ و أن $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$

حدد صورة النقطة A بالدوران R

التمرين 3 : (الدورة الاستدراكية 2014)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$

2) نعتبر , في المستوى المنسوب إلى م. م م مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ النقط A و B و C و D و Ω التي ألحاقها على التوالي هي: $a = 2 + i$ و $b = 2 - i$ و $c = i$ و $d = -i$ و $\omega = 1$

ـ بين أن $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$ ثم استنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية ومتساوي الساقين

3) لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M'(z')$ صورتها بالدوران R الذي مركزه Ω وزاويته هي $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن : $z' = iz + 1 - i$

ب- تحقق من أن $R(A) = C$ و $R(D) = B$

ج - بين أن النقط A و B و C و D تنتمي لنفس الدائرة محددا مركزها

التمرين 4 : (الدورة العادية 2017)

نعتبر العددين $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1) أ ـ تحقق من أن: $b = (1 + i)a$

ب ـ استنتج أن : $|b| = 2\sqrt{2}$ و $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

ج ـ استنتج مما سبق أن : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم م. م. مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

ـ نعتبر النقطتين $A(a)$ و $B(b)$ و النقطة C التي لحقها $c = -1 + i\sqrt{3}$

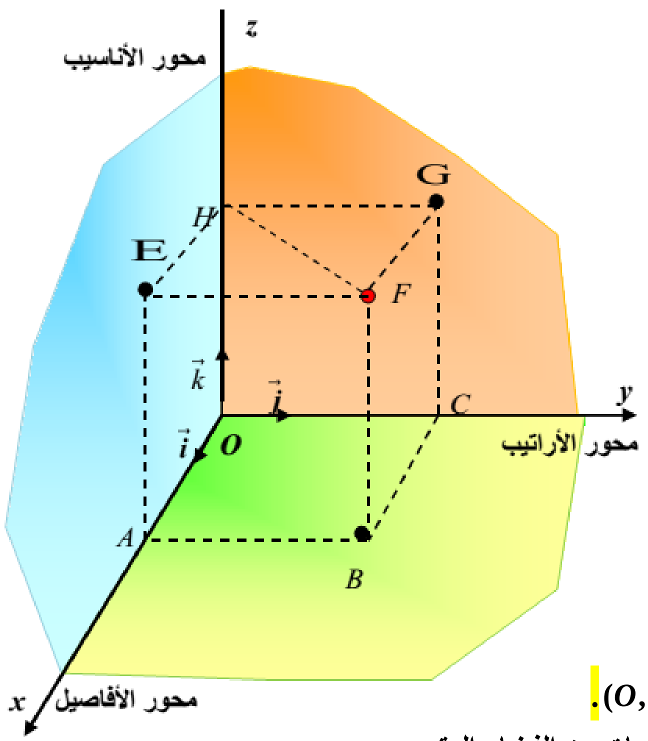
أ- تحقق من أن $c = i\,a$ و استنتج أن $OA = OC$ و أن $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع

من ظن أنه قد تعلم . . فقد بدأ جهله

I) تـــذكـيـــر Rappel



نشاط : في الشكل جانبه لدينا ABCOEFGH مكعب ضلعه a .

نعتبر أن $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

ولدينا $\vec{i} \perp \vec{j}$ و $\vec{i} \perp \vec{k}$ و $\vec{j} \perp \vec{k}$

نقول إن الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- حدد احداثيات رؤوس المكعب

2- حدد احداثيات المتجهتين $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{AG}$

3- هل المستقيمين (HB) و (AG) متعامدان ؟

4- حدد احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[EB]$

5- أحسب المسافة IC

نعتبر في كل ما يلي أن الفضاء منسوب إلى معم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ ثلاث متجهات من الفضاء المتجهي

خاصيات أساسية و تعاريف

1) إحداثيات متجهة: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

2) إحداثيات I منتصف $[AB]$: $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

3) المسافة: $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

4) الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي: $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$ ولدينا $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

5) منظم متجهة: $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

6) النظمة التالية : $\begin{cases} x = x_A + a.t \\ y = y_A + b.t \\ z = z_A + c.t \end{cases} \; / \, t \in IR$ تسمى تمثيلا بارمتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a;b;c)$

7) النظمة: $\begin{cases} x = x_A + a.t + a'k \\ y = y_A + b.t + b'k \\ z = z_A + c.t + c'k \end{cases} \; / \, (t;k) \in IR^2$ تسمى تمثيلا بارمتريا للمستوى (P) المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$

8) استقامية متجهتين:

نقول إن $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ مستقيميتان : إذا كان $ab'-ba'=0$ و $bc'-cb'=0$ و $ac'-ca'=0$

9) محددة ثلاث متجهات:

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

10) نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

11) نقول إن النقط A و B و C و D مستوائية إذا كان: $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0$

12) نقول إن المثلوث $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس للفضاء إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$

13) معادلة ديكارتية لمستوى معرف بنقطة ومتجهتين موجهتين:

- إذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من (P) و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين موجهتين له و $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء . فإن:

$$M\in(P)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u},\vec{v}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha x+\beta y+\gamma z+d=0$$

ملاحظة : المتجهة $\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)$ تسمى متجهة منظمية على المستوى (P)

14) ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) و $\vec{v}$ متجهة موجهة لـ (Δ). لدينا:

- $(D)\parallel(\Delta)\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان)
- $(D)\perp(\Delta)\Leftrightarrow(\vec{u}\perp\vec{v})$

- نقول عن متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ إنها منظمية على (P) إذا كانت متعامدة مع كل المتجهات الموجهة للمستوى (P)
- إذا كانت $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من (P) و $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية عليه و $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء، فإن:

$$M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

مع $d=-ax_A-by_A-cz_A$

- مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء بحيث : $ax+by+cz+d=0$ و $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ هي مستوى و المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية عليه.

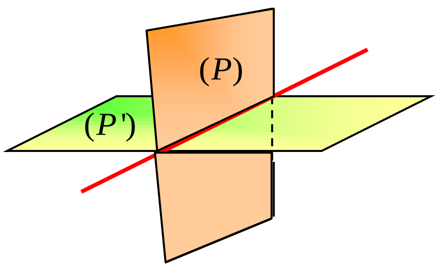
15) الوضع النسبي للمستويين (P) و (P') في الفضاء:

نعتبر: $(P):ax+by+cz+d=0$ و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$

بحيث $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P) و $\vec{n}'(a',b',c')$ منظمية على (P').

لدينا: - $(P)//(P')\Leftrightarrow$ ($\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مستقيميتان)

- $((P)\perp(P'))\Leftrightarrow\left(\vec{n}\perp\vec{n}'\right)$



ملاحظة : إذا كان (P) و (P') متقاطعان فإن تقاطعهما عبارة عن مستقيم

16) الوضع النسبي لمستوى و مستقيم :

ليكن (D) مستقيما من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة موجهة له وليكن (P) مستوى و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه . لدينا:

- $(D)\perp(P)\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{n}$ مستقيميتان)
- $(D)//(P)\Leftrightarrow(\vec{n}\perp\vec{u})$
- إذا كان (D) مستقيما عموديا على المستوى (P) فإن كل متجهة منظمية على (P) تكون موجهة لـ (D)
- لتحديد تقاطع مستقيم (D) و مستوى (P) نقوم بحل النظمة المكونة من تمثيل بارمتري للمستقيم (D) والمعادلة الديكارتية للمستوى (P)

17) مسافة نقطة عن مستوى: $(P): ax+by+cz+d=0$ لدينا :

$$\boxed{d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

II) الفلكة — La sphère

1) مجموعة النقط M بحيث $\Omega M=r$ (مع $r>0$) هي الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمز لها ب: $S(\Omega,r)$

2) معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega,r)$

نعتبر $\Omega(a,b,c)$ ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء . لدينا:

$$\mathrm{M}\in(S)\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}=r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

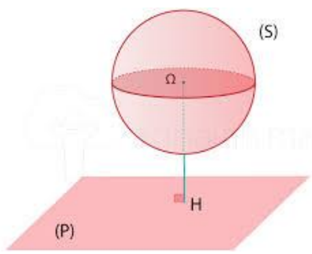
3) مجموعة النقط $\mathrm{M}(x,y,z)$ من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

4) تحديد E مجموعة النقط $\mathrm{M}(x,y,z)$ من الفضاء بحيث: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$

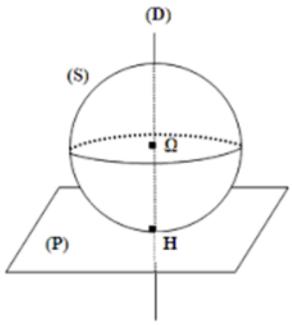
- إذا كان: $k>0$ فإن: E فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$
- إذا كان: $k=0$ فإن: $E=\{\Omega(a,b,c)\}$
- إذا كان: $k<0$ فإن : $E=\varnothing$

5) تقاطع مستوى و فلكة: لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة و (P) مستوى في الفضاء و H المسقط العمودي لـ Ω على (P) و $d=d(\Omega,(P))$

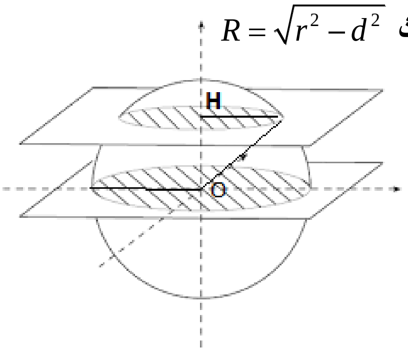
- إذا كان $d>r$ فإن (P) يوجد خارج (S) أي $(P)\cap(S)=\varnothing$



- إذا كان $d=r$ فإن (P) مماس لـ (S) في النقطة H



- إذا كان $d<r$ فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها R بحيث $R=\sqrt{r^2-d^2}$

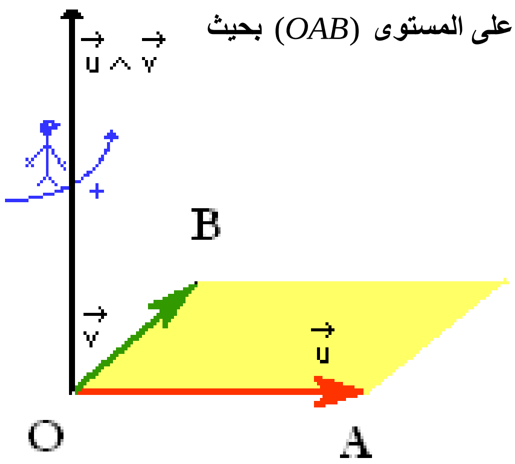


حالة خاصة : إذا كانت $d(\Omega,(P))=0$ أي $\Omega\in(P)$ فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r

6) معادلة مستوى مماس لفلكة $S(\Omega,r)$ في نقطة A:

$$\mathrm{M}(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{A\Omega}}=0$$

III) الجداء المتجهي — Produit vectoriel



1) الجداء المتجهي: نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب هو المتجهة $\vec{w}$ بحيث: $\vec{w}$ منظمية على المستوى (OAB) بحيث يكون المثلوث $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ مباشرا

✓ نرمز للمتجهة $\vec{w}$ بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ونقرأ: ($\vec{u}$ متجهي $\vec{v}$)

✓ $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$

✓ $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin\alpha|=OA\times OB\times|\sin\alpha|$

✓ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان) $\Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

✓ (A و B و C نقط مستقيمية) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

2) خاصيات: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من V_3 و $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ م.م.م مباشر

$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$	$\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$
$k(\vec{u}\wedge\vec{v})=k\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge k\vec{v}$	$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

3) الجداء المتجهي (تحليليا): نعتبر $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ لدينا:
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

4) مساحة مثلث ABC هي: $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

5) تحديد معادلة ديكارتية لمستوى (ABC)

لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) إذن $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=0$

6) مسافة نقطة عن مستقيم: $d(M,D(A,\vec{u}))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

7) تقاطع مستقيم و فلكة: لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة و (D) مستقيم و H المسقط العمودي لـ Ω على (D) و $d(\Omega,(D))=\Omega H$

- إذا كان $\Omega H>r$ فإن (D) لا يقطع (S) أي $(D)\cap(S)=\varnothing$
- إذا كان $\Omega H=r$ فإن (D) مماس ل (S) في النقطة H
- إذا كان $\Omega H<r$ فإن (D) يقطع (S) في نقطتين .
- لتحديد تقاطع مستقيم (D) و فلكة (S) نقوم بحل النظمة المكونة من تمثيل بارمتري لـ (D) والمعادلة الديكارتية للفلكة (S)

8) تقاطع مستويين: إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متجهتين منظميتين على (P) و (P') على التوالي فإن:

المتجهة $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}$ موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (P')

سلسلة تمارين

التمرين 1 : (تجريبي 2015)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,1,0)$ و $B(2,-1,-2)$ والفلكة (S) بحيث:
$$(S):x^2+y^2+z^2-2x+14y-12z+5=0$$

1) بين أن (S) فلكة مركزها $\Omega(1,-7,6)$ وشعاعها 9

2) بين أن: $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x-2y+3z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω والعمودي على المستوى (OAB).

4) بين أن المستقيم (D) يقطع (OAB) في $H(-3,-3,0)$

5) بين أن المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة يتعين تحديد مركزها وشعاعها

التمرين 2 : (الدورة العادية 2015)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوى $(P):x+y+z+4=0$ والفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,-1,-1)$ و شعاعها $\sqrt{3}$

1) أ- احسب $d(\Omega,(P))$ ثم استنتج أن (P) مماس لـ (S)

ب- تحقق من أن النقطة $H(0,-2,-2)$ هي نقطة التماس

2) نعتبر النقطتين $A(2,1,1)$ و $B(1,0,1)$

أ- تحقق من أن $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ و استنتج أن $x-y-z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى

ب- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω والعمودي على المستوى (OAB).

3) حدد مثلوث احداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والفلكة (S)

التمرين 3 : الدورة الاستدراكية 2008

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوى $(P):x+2y+z-1=0$

والفلكة : $(S):x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$

1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,3,-1)$ وأن شعاعها هو 3

2) أ- بين أن مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) هي $\sqrt{6}$

ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) شعاعها هو $\sqrt{3}$

3) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω و العمودي على المستوى (P)

ب – بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(1,1,-2)$

التمرين 4 : الدورة الاستدراكية 2016

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين، $A(1,3,4)$ و $B(0,1,2)$.

1) أ- بين أن: $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

ب- استنتج أن $2x-2y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB).

2) نعتبرالفلكة: $(S):\ x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

حدد مركز وشعاع الفلكة (S)

3) أ- بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S).

ب- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس (OAB) و الفلكة

Le dénombrement التعداد

تمهيد: التعداد هو جزء من الرياضيات يدرس الطرق المختلفة لتجميع و ترتيب مجموعة من العناصر.
و تحليلية التعداد تهتم بعدِّ هذه الاختيارات .

I - المجموعات المنتهية Les ensembles finies

تعريف: لتكن E مجموعة منتهية. عدد عناصر E يسمى رئيسي المجموعة E
ونرمز له بـ : $cardE$ ونقرأ (cardinal de E)

خاصيات: إذا كانت A و B مجموعتان منتهيتان فإن:

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow card(A\cup B)=cardA+cardB$$

و $A\cap B\neq\varnothing \Rightarrow card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)$

متمم مجموعة Complémentaire d'un ensemble

تعريف: لتكن E مجموعة منتهية .
متمم المجموعة A في E هو مجموعة العناصر من E التي لا تنتمي إلى A
و نرمز لمتمم المجموعة A في E ب: $\overline{A}$ حيث $\overline{A}=\{x\in E / x\notin A\}$

خاصيات: $\overline{A}\cup A=E$ و $\overline{A}\cap A=\varnothing$ و $card\overline{A}=cardE-cardA$

II- المبدأ العام للتعداد أو المبدأ الأساسي للتعداد أو مبدأ الجداء Principe du produit

المبدأ: نعتبر تجربة عشوائية تتم بـ: p من الاختيارات .
إذا كان الاختيار الأول يتم بـ n_1 من الكيفيات
و الاختيار الثاني يتم بـ n_2 من الكيفيات
.. .. n_3 .. .. ..
.. ..
والاختيار رقم p يتم بـ n_p .. ..
فإن: عدد الكيفيات التي تتم بها هذه التجربة هو : $n_1\times n_2\times n_3\times .....\times n_p$

III- الترتيبات Les arrangement

الترتيبات بتكرار: عدد الترتيبات بتكرار لـ: p من بين n هو n^p . بحيث n و p من IN^*

الترتيبات بدون تكرار $(p\leq n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار لـ: p من بين n هو : $A_n^p=n\times(n-1)\times.....\times(n-p+1)$

التبديلات

كل ترتيبة بدون تكرار لـ: n عنصر من بين n تسمى تبديلة لـ: n عنصر
وعدد التبديلات permutations لـ: n عنصر هو $A_n^n=n\times(n-1)\times.....\times1$
و نرمز للعدد A_n^n بـ: $n!$ و نقرأ (n عاملي) نقبل أن $0!=1$

معامل الترتيب : إذا كان لدينا n عنصر مع $n=m+k+p$ بحيث m عنصر من نوع معين و k عنصر من نوع آخر و p عنصر من نوع ثالث فإن عدد أمكانيات ترتيب هذه العناصر هو: $\dfrac{(m+k+p)!}{m!\times k!\times p!}$

III- التأليفات Les combinaisons

تعريف : لتكن E مجموعة عدد عناصرها n بحيث $(p\leq n)$

كل جزء F من E عدد عناصره p يسمى تأليفة لـ: p من بين n . و عدد التأليفات لـ : p عنصر من بين n هو : $C_n^p=\dfrac{A_n^p}{p!}$

حالات خاصة: $C_n^p=C_n^{n-p}$ و $C_n^0=C_n^n=1$ و $C_n^1=C_n^{n-1}=n$

حدانية نيوتن $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\times b^k$

IV. السحب — Le tirage

نعتبر كيسا يضم n كرة و نريد سحب p كرة

إذا تم السحب

- في آن واحد ← فإن الترتيب غير مهم والتكرار غير وارد ← C_n^p
- بالتتابع وبإحلال ← فإن الترتيب مهم والتكرار وارد ← n^p
- بالتتابع وبدون إحلال ← فإن الترتيب مهم والتكرار غير وارد ← A_n^p

سلسلة تمارين

التمرين 1 :

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وخمس كرات خضراء و كرتين بيضاوين

نسحب تآنيا ثلاث كرات من الكيس

1) ماهو عدد السحبات الممكنة؟
2) ماهو عدد إمكانيات سحب ثلاث كرات من ألوان مختلفة مثنى مثنى؟
3) ما هو عدد إمكانيات سحب ثلاث كرات من نفس اللون؟
4) ماهو عدد إمكانيات سحب ثلاث كرات مختلفة اللون؟
5) ما هو عدد إمكانيات سحب كرتين من نفس اللون فقط؟
6) ما هو عدد إمكانيات سحب كرة سوداء على الأقل؟
7) ما هو عدد إمكانيات سحب كرتين حمراوين على الأكثر؟

التمرين 2 :

نسحب ثلاث كرات بالتتابع وبإحلال.

(نفس أسئلة التمرين 1)

التمرين 3 :

نسحب ثلاث كرات بالتتابع وبدون إحلال.

(نفس أسئلة التمرين 1)

الدرس 12

حساب الاحتمالات — Probabilité

1) مفاهيم ومصطلحات: — Notions et vocabulaires

- تجربة عشوائية Expérience aléatoire هي كل تجربة نعلم جميع نتائجها المحتملة لكن لا يمكن أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها

أمثلة:(رمي نرد مكعب، سحب كرات من كيس لا نستطيع التعرف عليها باللمس،القرعة ، الرهان على الخيول، لعبة الورق،استطلاع للرأي، ...).

مثال: نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة ثلاث مرات متتالية فتسقط كل مرة إما على ظهرها او على وجهها Pile ou Face

- كون الإمكانيات **Espace Univers** : هي مجموعة منتهية عناصرها هي كل الإمكانيات المتاحة ونرمز لها عادة بـ Ω
- كل جزء من Ω يسمى حدثا **Evénement** أو إمكانية. ونرمز له بالرمز A او B او ..
- كل جزء من Ω بعنصر واحد يسمى حدثا ابتدائيا **Evénement élémentaire**.
- المجموعة الفارغة (لا تحتوي على أي نتيجة) و تسمى حدثا مستحيلا **Evénement impossible** .
- الحدث Ω (دائما محقق) و يسمى حدثا أكيدا **Evénement certain** .
- الحدث $A\cap B$ يعني تحقق الحدث A و الحدث B في نفس الوقت
- الحدث $A\cup B$ يعني تحقق الحدث A أو الحدث B
- A و B حدثان منسجمان **compatibles** إذا وفقط إذا كان $A\cap B\neq\varnothing$.
- A و B حدثان غير منسجمين **incompatibles** إذا وفقط إذا كان $A\cap B=\varnothing$
- الحدث المضاد للحدث A هو الحدث الذي يرمز له بـ $\overline{A}$ بحيث $A\cap\overline{A}=\varnothing$ و $A\cup\overline{A}=\Omega$

2) احتمال حدث — Probabilité d'un événement

تعريف: ليكن $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;......;\omega_n\}$ كون إمكانيات تجربة عشوائية . اذن $Card(\Omega)=n$

- عندما يستقر تردد حدث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمة p_i ، نقول إن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو p_i ونكتب: $p(\{\omega_i\})=p_i$.
- لكل حدث $A=\{\omega_1;\omega_2;......;\omega_k\}$ من Ω ، لدينا $p(A)=p_1+p_2+.....+p_k$
- $p(\Omega)=p_1+p_2+.....+p_k+.....+p_n=1$

نتيجة: احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي توجد ضمن A

خاصيات: اذا كان p احتمالا معرفا على Ω . وA و B حدثان من Ω فإن

- $0\le p(A)\le 1$ و $p(\Omega)=1$ و $p(\varnothing)=0$
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ في حالة $A\cap B=\varnothing$
- $p(\overline{A})=1-p(A)$ بحيث $\overline{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A

3) فرضية تساوي الاحتمالات — Hypothèse de l'équiprobabilité

مبرهنة: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمالات أي $p(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$

فإن :

$$\boxed{p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}}$$

تمرين تطبيقي: يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 5 كرات خضراء و كرتين صفراوين

نسحب **تآنيا** 3 كرات من الصندوق. ونعتبر الأحداث التالية

A: "الحصول على 3 كرات حمراء ".

B: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

C: " الحصول على 3 كرات مختلفة اللون ".

D: " الحصول على 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى ".

احسب مايلي: $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$ و $p(D)$

4) الاحتمال الشرطي — La probabilité conditionnelle

تعريف: ليكن A و B حدثين من Ω بحيث $p(B)\neq 0$

احتمال الحدث A علما أن الحدث B محقق هو : $p(A/B)=p_B(A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(B)}$

و اذا كان لجميع الاحداث الابتدائية نفس الاحتمال فإن: $p_B(A)=\dfrac{card(B\cap A)}{card(B)}$

خاصية: ليكن A و B حدثين من Ω بحيث $p(B)\neq 0$

لدينا $p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$

- اذا كان $A\cap B=\varnothing$ فإن $p_B(A)=0$

نتائج: ـ ليكن A و B حدثين من Ω بحيث $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=\Omega$ و نعتبر حدثا D من Ω لدينا :

$$p(D)=p(A\cap D)+p(B\cap D)$$
$$=p(A)\times p_A(D)+p(B)\times p_B(D)$$

الصيغة الأخيرة تسمى صيغة الاحتمالات الكلية

ـ الحدثان A وB مستقلان إذا كان $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

الاختبارات المتكررة : هي اختبارات مستقلة

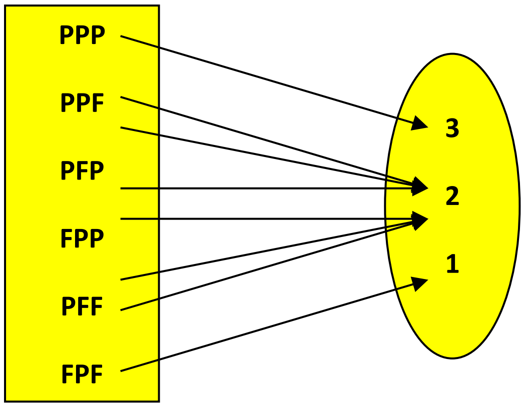
ليكن A حدث احتمال وقوعه في اختبار عشوائي هو p

إذا أعيد الاختبار n مرة فإن احتمال وقوعه k مرة بالضبط هو: $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

5) المتغيرات العشوائية — Les variables aléatoires

تعريف: نسمي متغير عشوائي كل تطبيق X معرف من Ω نحو IR
ونرمز لمجموعة قيم المتغير X بالرمز $X(\Omega)$

مثال : نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " F = وجه " ، " P = ظهر "
لدينا $\Omega = \{ PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF \}$
نعتبر التطبيق X الذي يربط كل نتيجة بعدد مرات ظهور الظهر
يسمى X المتغير العشوائي المعرف على Ω



في هذه الحالة لدينا $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$
والآن يمكننا أن نرمز للأحداث بترميز جديد

$(X=0)=\{FFF\}$

$(X=1)=\{PFF;FPF;FFP\}$

$(X=2)=\{PPF;PFP;FPP\}$

$(X=3)=\{PPP\}$

نلاحظ اننا نهتم بعدد المرات التي يظهر فيها الظهر

خلاصة: لتحديد قانون احتمال متغير عشوائي **X** نقوم بتحديد جميع القيم x_i التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X ثم نقوم بحساب احتمالات جميع الأحداث $(X=x_i)$
نعتبر أن $X(\Omega)=\{x_1,x_2,......,x_n\}$
الجدول التالي يسمى: جدول قانون احتمال X

x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

الأمل الرياضي $E(X)$ **:** $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$

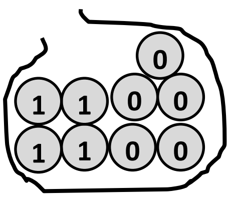
المغايرة $V(X)$ **:** $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

الانحراف الطرازي $\sigma(X)$ **:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

6) القانون الحداني — Loi binomiale

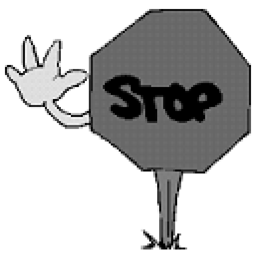
تعريف: نعتبر تجربة عشوائية بحيث نتيجتها تحقيق لحدث A (احتماله p)أو عدم تحقيقه (احتماله $\overline{p}=1-p$).
نعيد الاختبار أو التجربة n مرة (كل تجربة غير مرتبطة بسابقاتها). و ليكن X متغيرا عشوائيا يساوي عدد المرات التي يحقق فيها الحدث A.
نقول إن X **متغير عشوائي حداني وسيطاه** p و n . بحيث : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
الأمل الرياضي: $E(X)=np$ و المغايرة: $V(X)=np(1-p)$

تمرين تطبيقي : يحتوي كيس على بيدقات تحمل أعدادا كما هو مبين في الشكل



1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد بيدقتين من الكيس
ليكن الحدث A : "مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1"
بين أن $p(A)=\frac{5}{9}$

2) نعتبر اللعبة التالية: يعتبر سعيد فائزا إذا سحب بيدقتين تحمل كل واحدة منهما العدد 1
أ ــ بين أن احتمال فوز سعيد هو $\frac{1}{6}$
ب ــ يعيد سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس كل مرة)
وليكن X هو عدد المرات التي يفوز فيها سعيد
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . والمغايرة والانحراف الطرازي



سلسلة تمارين

التمرين 1 :

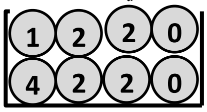
يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وخمس كرات خضراء و أربع بيضاء .
نسحب بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات.

A: "الحصول على كرتين بيضاوين متبوعتين بكرة حمراء "
B: "الحصول على كرتين بيضاوين و كرة حمراء "
C: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"
D: " الحصول على 3 كرات مختلفة اللون ".
E: " الحصول على 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى "
F: " الحصول على كرة حمراء على الأقل "

احسب مايلي: $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$ و $p(D)$ و $p(E)$ و $p(F)$

التمرين 2 : الدورة العادية 2017

يحتوي كيس على 8 كرات مرقمة كما هو مبين في الشكل .
كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس.



نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من الكيس

1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$ بحيث

A: " من بين الكرات المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0"
B: " جداء الأعداد التي تحملها الكرات المسحوبة يساوي 8"

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة

أ- بين أن $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

أتمم ملء الجدول معللا أجوبتك

التمرين 3 :

يحتوي كيس على ثلاث كرات خضراء و سبع كرات حمراء

1) نسحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الكيس

احسب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(C)$ بحيث:

A " سحب ثلاث كرات لها نفس اللون "
B " سحب كرتين خضراوين على الأقل "
C " سحب ثلاث كرات مختلفة اللون "

2) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة.

أ – بين أن القيم التي ياخذها X هي 0 و 1 و 2

ب – حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج – احسب $\sigma(X)$ الانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X

التمرين 4 :

يحتوي صندوق على كرة بيضاء و أربع كرات خضراء لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات من الصندوق.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة بعد كل تجربة.

- حدد قانون احتمال X

التمرين 5 :

في ثانوية ما ، 25 % من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15 % منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10 % مستواهم ضعيف في المادتين معا . نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية :

1) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات أيضا ؟
2) إذا كان هذا التلميذ مستواه ضعيفا في مادة الرياضيات ، ما إحتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟
3) ما إحتمال أن يكون مستوى هذا التلميذ ضعيفا في مادة الرياضيات أو في مادة الفيزياء ؟

التمرين 6 :

يتكون قسم من 25 % من الإناث و 75 % من الذكور .
نفترض أن 60 % من الإناث و 30 % من الذكور هم تلاميذ مستواهم جيد . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .

1) ما هو الاحتمال كي يكون هذا التلميذ بنتا ؟
2) ما هو الاحتمال كي يكون هذا التلميذ ولدا ؟
3) ما هو الاحتمال كي يكون هذا التلميذ جيدا ؟
4) ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصرا جيدا ؟

التمرين 7 :

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 9 و 10

- نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس.

1- أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "
B " الكرتان من نفس اللون "
C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2- ما إحتمال الأحداث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "
E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال أن يكون رقماهما فرديين ؟

التمرين8 :

يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين . نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .
نرمز بـ B_i للحادثة " الكرة المسحوبة في المرّة i بيضاء "

- أحسب الإحتمال $p(B_1)$ ثم $p(B_2/B_1)$
ثم استنتج $p(B_2 \cap B_1)$

Exercice 1 :

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

L'objectif est de calculer I, J et K.

1) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
   a) Calculer la fonction dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$.
   b) En déduire la fonction dérivée f' de f.
   c) Calculer la valeur de I.
2) Vérifier que J + 2I = K.
3) A l'aide d'une intégration par parties sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
4) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 2 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Soit C la courbe représentative de f et soit Δ la première bissectrice.

A - 1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) a) Montrer que pour $x < 0$, on a $f'(x) > 0$.
   b) Etudier les variations de f' sur $[\,0\,;+\infty\,[$. En déduire que pour $x > 0$, on a : $f'(x) > 0$.
   c) Construire le tableau de variation de f.
3) a) Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.
   b) On admettra l'inégalité suivante : $1 + t \leq e^t \leq \frac{1}{1-t}$ pour $t < 1$.
   En déduire que pour $x < 0$, on a : $\frac{x}{x-1} \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq 1$.
   c) Que vaut $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$? Montrer que la courbe C admet la droite D d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $-\infty$.
   d) Préciser la position de C par rapport à D pour $x < 0$.
4) Construire C et préciser l'intersection de C et de Δ.

B - 1) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$-{-1}, on ait :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \ .$$

2) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que f admet pour primitive sur $\mathbb{R}^+$ la fonction : $x \mapsto \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$.
3) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par Δ , C et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = e - 1$.

متطابقات هامة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

القيمة المطلقة : ليكن x و y عددين حقيقيين و $r > 0$ لدينا:

- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ المتفاوتة المثلثية
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x \leq -r \quad ou \quad x \geq r$

الحساب المثلثي

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\begin{cases} \cos(\pi+x) = -\cos x \\ \sin(\pi+x) = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos x \\ \sin(\pi-x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

إشارة $ax+b$ و ax^2+bx+c

اشارة Δ	تعميل ax^2+bx+c	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في IR
$\Delta < 0$	لا يمكن تعميلها	المعادلة ليس لها حلول في IR
$\Delta = 0$	$P(x) = a.(x-x_0)^2$	للمعادلة حل وحيد هو x_0 : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$P(x) = a.(x-x_1).(x-x_2)$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

في حالة $\Delta > 0$

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

هذه بعض الرموز التي تستعمل بكثرة في الرياضيات و الفيزياء

Alpha	Beta	Gamma	Delta	Theta	Zeta	Eta	Mu	Nu	Xi
A	B	Γ	Δ	Θ	Z	H	M	N	Ξ
α	β	γ	δ	θ	ζ	η	μ	ν	ξ
Lamda	Tau	Omega	Epsilon	Pi	Rho	Sigma	Phi	Chi	Psi
Λ	T	Ω	E	Π	P	Σ	Φ	X	Ψ
λ	τ	ω	ε	π	ρ	σ	φ	χ	ψ

السنة الثانية بكالوريا شعبة العلوم التجريبية

الدورة	نوع الفرض	تواريخ الفروض	مدة الإنجاز	تصحيح الفرض	مكونات الفرض	نسبة الأهمية
الأولى	منزلي 1	أسبوع 2		أسبوع 4	الاتصال الاشتقاق	50%
	محروس 1	أسبوع 5	ساعتان	أسبوع 6		50%
	منزلي 2	أسبوع 7		أسبوع 9	دراسة الدوال المتتاليات العددية الدوال الأصلية	40%
	محروس 2	أسبوع 11	ساعتان	أسبوع 12		45%
						15%
	منزلي 3	أسبوع 12		أسبوع 14	الدوال اللوغاريتمية الأعداد العقدية	40%
	محروس 3	أسبوع 15	ساعتان	أسبوع 16		60%
الثانية	منزلي 1	أسبوع 2		أسبوع 4	الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية المعادلات التفاضلية الحساب التكاملي	70%
	محروس 1	أسبوع 5	ساعتان	أسبوع 6		20%
						10%
	منزلي 2	أسبوع 8		أسبوع 10	الحساب التكاملي الهندسة الفضائية	30%
	محروس 2	أسبوع 11	ساعتان	أسبوع 12		70%
	منزلي 3	أسبوع 12		أسبوع 14	الهندسة الفضائية حساب الاحتمالات	20%
	محروس 3	أسبوع 15	ساعتان	أسبوع 16		80%

الفهرس

لائحة العطل المدرسية

2018/2017

المديرية الإقليمية: ......Berrchid.........   المستوى: ....

المؤسسة التعليمية: OMAR EL KHAYAM.........   الأستـــاذ(ة): ...BELKHYR......

ر.ت	العطل المدرسية	تواريخها	عدد الأيام
1	فاتح محرم	فاتح محرم 1439	01
2	ذكرى المسيرة الخضراء	يوم الاثنين 06 نونبر 2017	01
3	الفترة البينية الأولى وعيد الاستقلال	من يوم الأحد 12 نونبر 2017 إلى يوم الأحد 19 نونبر 2017	08
6	عيد المولد النبوي الشريف	يومي 12 و13 ربيع الأول 1439	02
7	فاتح السنة الميلادية	يوم الاثنين فاتح يناير 2018	01
8	ذكرى تقديم وثيقة الاستقلال	يوم الخميس 11 يناير 2018	01
9	عطلة منتصف السنة الدراسية	من يوم الأحد 21 يناير 2018 إلى يوم الأحد 04 فبراير 2018	15
10	الفترة البينية الثانية	من يوم الأحد 08 أبريل 2018 إلى يوم الأحد 15 أبريل 2018	08
11	عيد الشغل	يوم الثلاثاء فاتح ماي 2018	01
	عيد الفطر	من يوم 28 رمضان 1439 إلى يوم 02 شوال 1439	04
	مجموع أيام العطل		42

استعمال الزمن

	10 ----8	12 ---- 10		16 ------ 14	18 ------ 16
الاثنين					
الثلاثاء					
الأربعاء					
الخميس					
الجمعة					
السبت					

تقديم

تعتبر الرياضيات و تعلمها مشكلة عامة في جميع بلاد العالم و لجميع الأجيال، ويرجع السبب في ذلك لطريقة الدراسة حيث تحتاج الرياضيات لطرق مختلفة عن المواد الاخرى. في أغلب المواد يكفي التلميذ فهم الموضوع و حفظ المفردات المهمة للنجاح بل للتفوق في امتحانات هذه المواد ، لكن هذا غير كافي على الإطلاق في مادة الرياضيات . ففهم الموضوعات و حفظ الخاصيات و التعاريف والقوانين الرياضية شيء أساسي لكنه لا يكفي للنجاح في الرياضيات، بل لابد من تعلم كيفية استخدام هذه القوانين في المكان الصحيح و بالطريقة الصحيحة. كما أن تعلم الرياضيات عملية بنائية و تراكمية حيث يحتاج التلميذ لمهارات ليس فقط من الدروس السابقة بل من السنوات السابقة.

أبنائي التلاميذ إن التفوق في مادة الرياضيات لا يعتبر من المستحيلات و قد قيل " من أراد استطاع ، والثقة بالنفس تأتي بالمعجزات " وأنت – أيها التلميذ النجيب – لديك من الذكاء نصيب وافر ، فلا تقلل من شأن نفسك ، وإليك هذه النصائح لتستعين بها – بعد توفيق الله عز و جل لك – في طريق التفوق :

لا توجد طريقة مثالية واحدة لدراسة الرياضيات ولكن هناك بعض النصائح والإرشادات المفيدة كما يلى:

Challenges are what make life interesting , overcoming them is what makes life meaningful

التحديات هي التي تجعل الحياة مثيرة . والتغلب عليها هو ما يجعل للحياة معنى

- المواظبة على حضور الدروس.
- انتبه جيداً في الفصل أثناء الشرح و تابع أستاذك و تأكد من فهمك لكل نقطة .
- الانتباه الجيد و كتابة ملاحظات الأستاذ المكتوبة و الشفهية.
- سؤال أستاذك و زملاءك عن النقاط غير المفهومة أثناء أو بعد الدرس.
- راجع الدروس في حينها و قبل أن تتراكم عليك
- أداء الواجبات يساعد في تثبيت المعلومات ، وكذلك المناقشة مع الزملاء.
- ليس كل ما يدرس يُحفظ.
- لا تراجع دروسك وأنت مرهق ، واعلم أن من لا يحسن فن الراحة لا يحسن فن العمل .
- مراجعة الدروس بانتظام و تلخيص النقاط الهامة (نظريات, تعريفات, قوانين ,..إلخ) على ورقة خاصة .
- مراجعة مادة الرياضيات تعتمد على التنويع و الإكثار من انجاز التمارين و استخدام القلم و الورقة .
- لحل التمارين نبدأ بالتمارين الأسهل فالسهل و قد نحتاج في بداية الامر إلي النظر إلى مثال مشابه و تتبع خطوات الحل حتى تتمكن من حل التمرين. انتقل إلى تمرين ثاني و ثالث مشابه حتى تصبح لك القدرة علي الحل الصحيح دون أي مساعدة، ثم انتقل لنوع آخر من المسائل و هكذا.
- لا تنس الاستعانة بالكتاب المدرسي , فالكتاب قد يحتوى على أمثلة مختلفة عن أمثلة الفصل الدراسي كما أن الكتاب قد يعرض بعض المواضيع بأسلوب مختلف قد يكون أنسب لك.
- **و أخيراً لا تضخم صعوبة المادة و تقلل من قدراتك** .